Государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Сибирский государственный медицинский университет»
Министерства здравоохранения Российской Федерации

Е.В. Черникова, М.Б. Аржаник, Р.А. Манешева

МАТЕМАТИКА
(теоретический курс)

учебное пособие

ТОМСК
Сибирский государственный медицинский университет
2014

УДК 517 (075)

Ч 492 **Черникова Е.В., Аржаник М.Б., Манешева Р.А.** Математика (теоретический курс): учебное пособие / Томск: Сибирский государственный медицинский университет, 2014. – 144 с.

Данное пособие содержит материал, включающий в себя элементы линейной алгебры и аналитической геометрии, математического анализа и теории вероятностей. В конце каждой темы приведены тестовые задания, позволяющие проверить уровень усвоения изучаемого материала. Предложенная структура пособия помогает выделить главные аспекты изучаемых вопросов, организовать учебный процесс.

Учебное пособие «Математика (теоретический курс)» подготовлено по дисциплине «Математика» в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования для студентов, обучающихся по специальности социальная работа.

УДК 517 (075)

Рецензент:
В.В. Кулагина – канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики ГБОУ ВПО СибГМУ Минздрава России.

Утверждено и рекомендовано к печати Центральным методическим советом ГБОУ ВПО СибГМУ Минздрава России (протокол № 1 от 5 марта 2014 г.).

ВВЕДЕНИЕ

Данное учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся по специальности социальная работа.

Целью изучения данного курса является ознакомление с основами современного математического аппарата, формирование математической культуры; освоение математических методов для дальнейшего профессионального использования.

В результате освоения материала студент должен:

Знать:	• основные понятия линейной алгебры и основные понятия аналитической геометрии; • основные понятия дифференциального и интегрального исчисления: функция и ее предел, производная и дифференциал, неопределенный и определенный интегралы, их свойства, сферу их применения. • основные понятия теории вероятностей: испытание и событие, вероятность события и способы ее вычисления, случайная величина, ее закон распределения и числовые характеристики.
Уметь:	• применять основные понятия и методы линейной алгебры и аналитической геометрии для отыскания решений задач управления в социальной работе. • выбирать инструментальные средства классического математического анализа для решения оптимизационных задач управления социальной работой и интерпретировать результаты полученных решений; • применять основные понятия теории вероятностей к решению практических задач.
Владеть:	• навыками использования методов линейной алгебры для решения и реализации задач управления; • навыками выбора и применения инструментальных средств математического анализа для исследования и решения задач управления социальной работы основными математическими методами и приемами исследовательской и практической работы в области социальной работы; • навыками анализа и интерпретации результатов, полученных в результате использования математических методов при решении задач управления социальной работой.

Изучение данного курса позволяет:

- сформировать положительную мотивацию использования математических методов для решения профессиональных задач;
- выработать умения анализировать полученные результаты, привить навыки самостоятельного изучения литературы по математике.

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

§1. Матрицы

1.1. Основные понятия. Виды матриц

Определение: ***Числовой матрицей размера*** $(m \times n)$ называется прямоугольная таблица чисел, состоящая из *m* строк и *n* столбцов:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \left\| a_{ij} \right\|,$$

где $i = \overline{1,m}$ - номер строки, $j = \overline{1,n}$ - номер столбца. Числа a_{ij} называются ее ***элементами.***

Определение: Элементы, стоящие на диагонали, идущей из верхнего левого угла, образуют ***главную диагональ.***

Определение: ***Матрицы*** равны между собой, если равны все соответствующие элементы этих матриц: А =В, если $a_{ij} = b_{ij}$, где $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$.

Определение: Матрица, у которой число строк равно числу столбцов, называется ***квадратной матрицей n-го порядка.***

Определение: ***Квадратная матрица***, у которой все элементы, кроме диагонали равны нулю, ***называется диагональной*** (рис 1*а*)***.***

Определение: ***Диагональная матрица***, у которой каждый элемент главной диагонали равен единице, называется ***единичной*** (рис 1*б*)***.***

Определение: ***Квадратная матрица называется треугольной,*** если все элементы, расположенные по одну сторону от главной диагонали, равны нулю (рис 1в).

$$a)\ A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad б)\ E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad в)\ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Рис. 1 Виды матриц

Определение: ***Матрица,*** все элементы которой равны нулю, называется ***нулевой.***

Определение: ***Матрица***, содержащая один столбец или одну строку, называют ***вектором (вектор-столбец*** (рис 2*а*) ***или вектор-строка*** (рис 2*б*)***)***

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_m \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix}$$

а) *б)*

Рис. 2 Виды вектора.

Определение: ***Матрица,*** полученная из данной заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером, называется ***транспонированной к данной.***

$$A^T = \left\| a_{ji} \right\|.$$

Пример 1: Транспонировать матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение: Поменяем строки матрицы со столбцами: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

1.2. Действия над матрицами

Над матрицами можно выполнять как линейные, так и нелинейные операции. В результате всех действий над матрицами всегда получается *матрица.*

<u>Линейные операции над матрицами:</u>

1. Сложение (вычитание) матриц.

Складывать можно только матрицы ***одного*** размера.

<u>Правило:</u> Для того, чтобы сложить (вычесть) две матрицы, нужно сложить (вычесть) их соответствующие элементы: $\left\| c_{ij} \right\| = \left\| a_{ij} \right\| + \left\| b_{ij} \right\|$

Пример 2: Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 4 & -7 & 5 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ 12 & -5 & 0 \end{pmatrix}$.

Найти $A+B$ и $B–A$.

Решение: Матрицы A и B являются матрицами одного порядка, следовательно их можно складывать.

Найдем

$$A + B = \begin{pmatrix} 4 & -7 & 5 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ 12 & -5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+1 & -7-4 & 5+8 \\ 2+12 & 0-5 & -3+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -11 & 13 \\ 14 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

$$B - A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ 12 & -5 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -7 & 5 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-4 & -4+7 & 8-5 \\ 12-2 & -5-0 & 0+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 3 \\ 10 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Умножение матрицы на число.

<u>Правило:</u> Для того, чтобы умножить (разделить) матрицу на отличное от нуля число, нужно умножить (разделить) на это число все элементы матрицы.

Аналогично можно определить обратное действие – вынесение общего множителя из всех элементов матрицы за знак матрицы.

Пример 3: $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. Найти $2A$.

Решение: Умножим каждый элемент матрицы A на 2:

$$2A = \begin{pmatrix} 2\cdot 0 & 2\cdot(-1) & 2\cdot 2 \\ 2\cdot 3 & 2\cdot 4 & 2\cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 6 & 8 & 10 \end{pmatrix}$$

Определение: ***Матрица*** $-A=(-1)\cdot A$ ***называется противоположной матрице А.***

Свойства линейных операций:

1. $A+B=B+A$;
2. $A+(B+C)=(A+B)+C$;
3. $A+O=O+A$;
4. $A-A=O$;
5. $1\cdot A=A$;
6. $\alpha\cdot(A+B)=\alpha A+\alpha B$;
7. $(\alpha+\beta)\cdot A=\alpha A+\beta A$;
8. $\alpha\cdot(\beta A)=(\alpha\beta)\cdot A$.

Нелинейные операции над матрицами:

1. Произведение матриц

Операция умножения двух матриц вводится только для случая, когда ***число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы:***

$$(m\times n)\times(n\times p)$$

Правило: ***Произведением матрицы*** $A_{m\times n}=\left\| a_{ij}\right\|$ ***на матрицу*** $B_{n\times p}=\left\| b_{jk}\right\|$ называется матрица $C_{m\times p}=\left\| c_{ik}\right\|$ такая, что

$$c_{ik}=a_{i1}\cdot b_{1k}+a_{i2}\cdot b_{2k}+...+a_{in}\cdot b_{nk},$$

где $i=\overline{1,m}$, $k=\overline{1,p}$, т.е. элемент *i*-й строки и *k*-го столбца матрицы произведения *C* равен сумме произведений элементов *i*-й строки матрицы *A* на соответствующие элементы *k*-го столбца матрицы *B* (рис. 3).

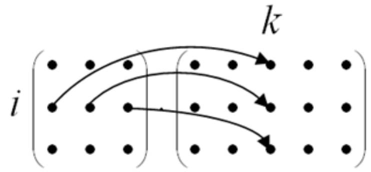


*Рис.*3

Пример 6: Выполните действие: $\begin{pmatrix}1&4&2\\0&5&-1\\3&-2&-4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5&9\\0&6\\1&-3\end{pmatrix}$.

Решение: $(3\times3)\cdot(3\times2)=(3\times2)$ Выполнять умножение можно, в результате получим матрицу размера (3×2):

$$\begin{pmatrix}1&4&2\\0&5&-1\\3&-2&-4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5&9\\0&6\\1&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot5+4\cdot0+2\cdot1 & 1\cdot9+4\cdot6+2\cdot(-3)\\ 0\cdot5+5\cdot0-1\cdot1 & 0\cdot9+5\cdot6-1\cdot(-3)\\ 3\cdot5-2\cdot0-4\cdot1 & 3\cdot9-2\cdot6-4\cdot(-3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&27\\-1&33\\11&27\end{pmatrix}.$$

2. Возведение матрицы в целую положительную степень.

Возведение в степень есть многократное умножение, поэтому при возведении в степень матрицы мы умножаем ее саму на себя нужное число раз. Например:

$$A^2=A\cdot A,\quad A^3=A^2\cdot A=A\cdot A^2$$

Пример 7: Выполните действие: $\begin{pmatrix}1&-2\\-3&6\end{pmatrix}^2$.

Решение:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 - 2\cdot(-3) & 1\cdot(-2) - 2\cdot 6 \\ -3\cdot 1 + 6\cdot(-3) & -3\cdot(-2) + 6\cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -14 \\ -21 & 42 \end{pmatrix}$$

Свойства нелинейных операций:

1. Переместительный закон в общем случае ***не выполняется***

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

2. Сочетательный закон выполняется при условии, что существуют все произведения $(A \cdot B)$, $(B \cdot C)$, $(A \cdot B) \cdot C$, $A \cdot (B \cdot C)$, тогда

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C).$$

3. Распределительный закон

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C, \quad (A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C.$$

4. $\alpha(A \cdot B) = (\alpha A) \cdot B = A \cdot (\alpha B)$

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

Выбрать один или несколько правильных ответов.

1. ДАНА МАТРИЦА $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 7 & 8 & 0 & -2 \\ 3 & -3 & -5 & 4 \\ -4 & 6 & -6 & 9 \end{pmatrix}$. ЗНАЧЕНИЕ $a_{13} - a_{41}$ РАВНО

1) –2
2) 6
3) 8
4) 2

2. УСТАНОВИТЕ СООТВЕТСТВИЕ МЕЖДУ МАТРИЦАМИ И ИХ ВИДАМИ

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \ D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1) вектор-строка
2) диагональная
3) треугольная
4) вектор-столбец

A	*B*	*C*	*D*

3. ДАНЫ МАТРИЦЫ $A_{3\times 5}$, $B_{5\times 3}$, $C_{3\times 4}$ НАД ЭТИМИ МАТРИЦАМИ ВОЗМОЖНО ВЫПОЛНИТЬ СЛЕДУЮЩИЕ ДЕЙСТВИЯ

1) $A+B$
2) $A+B^T$
3) $A\cdot B$
4) $B\cdot A$
5) $A-2C$
6) $C\cdot A$

4. К ЛИНЕЙНЫМ ОПЕРАЦИЯМ ОТНОСЯТ

1) умножение матриц
2) сложение матриц
3) умножение матрицы на число
4) возведение матрицы в степень

5. В РЕЗУЛЬТАТЕ УМНОЖЕНИЯ МАТРИЦЫ $A_{5\times 9}$ НА МАТРИЦУ $B_{m\times n}$ ПОЛУЧАЕТСЯ МАТРИЦА $C_{5\times 1}$. ЗНАЧИТ, n РАВНО

1) 9
2) 5
3) 1
4) 6

§2. Определители

2.1. Основные понятия

Определение: ***Определителем или детерминантом*** квадратной матрицы порядка n называется число det$A$ (или $|A|$, или Δ), вычисляемое из элементов этой матрицы по определенному правилу:

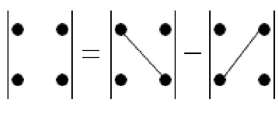
1. $n=1$. $A=\left(a_1\right)$; $\det A=a_1$.

2. $n=2$. $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$; $\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}$.

3. $n=3$. $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$; $\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{21}a_{13}a_{32}-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{21}a_{12}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Вычисление определителя второго порядка иллюстрируется схемой:



Пример 1: Найти определители $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$ и $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$.

Решение: $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 2\cdot 6 - 5\cdot(-3) = 12 + 15 = 27$.

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos\alpha\cdot\cos\alpha - (-\sin\alpha)\cdot\sin\alpha = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

При вычислении определителя 3-го порядка удобно пользоваться ***правилом Саррюса.*** Пусть дан определитель 3-го порядка

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

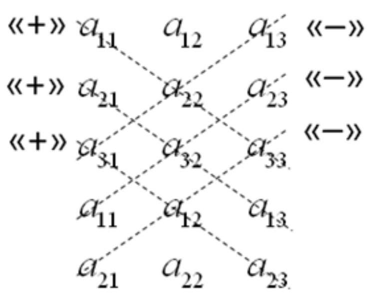


*Рис.*4

Запишем таблицу чисел, в которой первые три строки совпадают со строками определителя, а 4-я и 5-я строки – с первой и второй строками соответственно (рис.4). Параллельно диагоналям соединим прямыми линиями три элемента. Произведения элементов на линиях, наклоненных параллельно главной диагонали возьмем со знаком «+», параллельно побочной – со знаком «–». Сумма этих произведений со своими знаками и будет определитель.

Пример 2: Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

Решение: Найдем определитель, используя правило Саррюса:

$$\begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 5\cdot 1\cdot(-3) + 3\cdot 2\cdot 1 + 6\cdot(-2)\cdot(-4) - 1\cdot 1\cdot 6 - (-4)\cdot 2\cdot 5 - (-3)\cdot(-2)\cdot 3 =$$

$$\begin{matrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \end{matrix} \quad = -15 + 6 + 48 - 6 + 40 - 18 = 55.$$

2.2. Свойства определителей

1. Равноправность строк и столбцов: определитель матрицы не изменится при ее транспонировании (если его строки заменить столбцами и наоборот).

$$\det A = \det A^T.$$

В дальнейшем строки и столбцы будем называть ***рядами определителя.***

2. При перестановке двух параллельных рядов определитель меняет знак.

3. Определитель с двумя одинаковыми рядами равен нулю.

4. Общий множитель всех элементов какого-либо ряда можно вынести за знак определителя.

5. Определитель равен нулю, если все элементы какого-либо ряда равны нулю.

6. Если элементы двух рядов пропорциональны, то определитель равен нулю.

7. Определитель не изменится, если все элементы какого-либо ряда умножить на отличное от нуля число и прибавить к соответствующим элементам другого ряда.

8. Определитель треугольной матрицы равен произведению элементов главной диагонали.

Определение: ***Минором*** некоторого элемента a_{ij} определителя n-го порядка называется определитель n-1-го порядка, полученный из исходного путем вычеркивания строки и столбца, на пересечении которых находится выбранный элемент.

Например,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \text{то} \quad M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad M_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Определение: ***Алгебраическим дополнением элемента*** a_{ij} определителя называется минор, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}.$$

Так, $A_{11} = M_{11}, \quad A_{32} = -M_{32}$.

9. Определитель равен сумме произведений элементов некоторого ряда на соответствующие им алгебраические дополнения

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} \quad \text{или} \quad \Delta = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}.$$

Данное свойство часто называют разложением определителя по строке или столбцу.

Пример 3: Используя свойства определителя, вычислите определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix}.$$

Решение: Выполним разложение определителя по элементам первой строки

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + (-3) \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (8+1) - (16-1) - 3(4+2) = 18 - 15 - 18 = -15.$$

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

Выбрать один или несколько правильных ответов.

1. ФОРМУЛА ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ 2-ГО ПОРЯДКА ИМЕЕТ ВИД

1) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{21} - a_{12} \cdot a_{22}$

2) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{12} - a_{21} \cdot a_{22}$

3) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$

4) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{12} \cdot a_{21} - a_{11} \cdot a_{22}$

2. ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ НЕ ИЗМЕНИТСЯ, ЕСЛИ

1) поменять местами любые две строки
2) транспонировать матрицу
3) умножить все элементы столбца на одно и то же число
4) к элементам какой-либо строки прибавить элементы другой строки, умноженной на одно и то же число

3. ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ БУДЕТ РАВЕН НУЛЮ, ЕСЛИ ОН СОДЕРЖИТ

1) две пропорциональные строки
2) строку, состоящую из нулей
3) строку, состоящую из единиц
4) два равных столбца

4. МИНОР $M_{12} = -5$. ЗНАЧИТ, АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ ДОПОЛНЕНИЕ A_{12} БУДЕТ РАВНО

1) 5
2) – 5
3) 25
4) 15

§3. Невырожденные матрицы

3.1. Обратная матрица

Определение: Квадратная матрица A называется ***невырожденной,*** если ее определитель не равен нулю $\Delta = \det A \neq 0$, и ***вырожденной*** в противном случае ($\Delta = 0$).

Определение: ***Присоединенной матрицей*** к квадратной матрице A называется матрица $\tilde{A} = \left(A_{ij}\right)^T$, полученная транспонированием матрицы, составленной из алгебраических дополнений A_{ij} к элементам a_{ij}.

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Определение: ***Матрица*** A^{-1} называется обратной к матрице A, если произведение матриц А и $А^{-1}$ равно единичной матрице.

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$$

Теорема: ***Если квадратная матрица*** A ***– невырожденная, то она имеет обратную матрицу***

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\tilde{A}.$$

Схема нахождения обратной матрицы:

1. Вычислить определитель матрицы A. Если $\Delta A \neq 0$, то обратная матрица существует.
2. Составить матрицу из алгебраических дополнений к элементам исходной матрицы.
3. Полученную матрицу транспонировать в матрицу $\tilde{A}$.
4. Все элементы матрицы $\tilde{A}$ разделить на величину определителя матрицы A.

Чтобы проверить правильность нахождения обратной матрицы нужно умножить ее на матрицу A. В результате должна получиться единичная матрица.

Пример 1: Найти матрицу, обратную матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.

Решение: Вычислим определитель матрицы A:

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -3 - 8 = -11 \neq 0.$$

Следовательно, обратная матрица существует. Найдем алгебраические дополнения к элементам матрицы A:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot (-3) = -3,\ A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 4 = -4,\ A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 2 = -2,\ A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 1 = 1.$$

Тогда матрица из алгебраических дополнений, имеет вид $\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

Найдем присоединенную матрицу: $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$, следовательно,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{11} & \dfrac{2}{11} \\ \dfrac{4}{11} & -\dfrac{1}{11} \end{pmatrix}.$$

3.2. Ранг матрицы

В дальнейшем при решении систем линейных уравнений потребуется решать вопрос о наличии линейно зависимых строк в матрице и о количестве линейно независимых строк. Ответить на этот вопрос поможет понятие ранга матрицы.

Определение: ***Рангом матрицы*** называется наивысший порядок отличного от нуля минора матрицы:

$$r = r(A) = \operatorname{rang} A.$$

Понятно, что $0 \le r \le \min(m;n)$.

Определение: ***Минор,*** порядок которого определяет ранг матрицы, называется ***базисным.***

У матрицы может быть несколько базисных миноров.

Свойства ранга матрицы:

1. При транспонировании матрицы ее ранг не меняется.
2. Если вычеркнуть из матрицы нулевой ряд, то ранг матрицы не изменится.
3. Ранг матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях матрицы.

Для нахождения ранга матрицу приводят к треугольному или ступенчатому виду. Выявляемые при этом нулевые строки вычеркиваются, а по количеству оставшихся строк судят о ранге матрицы.

Пример 2: Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 \\ 4 & -2 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 8 \end{pmatrix}$.

Решение: Воспользуемся методом элементарных преобразований. Чтобы привести матрицу к ступенчатому виду, необходимо получить под главной диагональю нули. Сначала обнулим элементы в первом столбце, стоящие ниже a_{11},т.е. элементы a_{21} и a_{31} обратим в нули.

$$A=\begin{pmatrix}2&-1&3&-2\\4&-2&5&1\\2&-1&1&8\end{pmatrix}\sim\left|\begin{matrix}\\S_2-2S_1\\S_3-S_1\end{matrix}\right|\sim\begin{pmatrix}2&-1&3&-2\\0&1&-1&5\\0&2&-2&10\end{pmatrix},$$

где S_1, S_2, S_3 – первая, вторая, третья строки соответственно.

Во втором столбце под диагональю один ненулевой элемент – элемент a_{32}. Аналогичными преобразованиями обратим элемент a_{32} в нуль.

$$A\sim\begin{pmatrix}2&-1&3&-2\\0&1&-1&5\\0&2&-2&10\end{pmatrix}\sim\left|\begin{matrix}\\\\S_3-2S_2\end{matrix}\right|\sim\begin{pmatrix}2&-1&3&-2\\0&1&-1&5\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Мы привели матрицу к ступенчатому виду. Осталось две ненулевые строки. Следовательно, ranq$A$=2.

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

Выбрать один или несколько правильных ответов.

1. МАТРИЦА A ИМЕЕТ 4 СТРОКИ И 5 СТОЛБЦОВ. ЕЕ РАНГ МОЖЕТ БЫТЬ РАВЕН

1) 5
2) 2
3) 4
4) 3,5

2. ДАНЫ МАТРИЦЫ $A=\begin{pmatrix}2&3&1&7\\5&4&0&9\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2&-6\\1&-3\end{pmatrix}$ И $D=\begin{pmatrix}1&4&6\\0&0&0\\2&5&8\end{pmatrix}$. ОБРАТНАЯ МАТРИЦА МОЖЕТ БЫТЬ ВЫЧИСЛЕНА ДЛЯ МАТРИЦЫ

1) A
2) B
3) C
4) D

3. РАНГ МАТРИЦЫ $r(A)=3$. ТОГДА $r(2A)$ РАВЕН

1) 6
2) 2
3) 3
4) 5

4. РАНГ МАТРИЦЫ $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ РАВЕН

1) 4
2) 5
3) 3
4) 2

5. РАНГА МАТРИЦЫ НЕ ИЗМЕНИТЬСЯ, ЕСЛИ

1) матрицу транспонировать
2) вычеркнуть из матрицы любой столбец
3) вычеркнуть из матрицы нулевую строку
4) умножить все элементы какой-либо строки на 5

§4. Системы линейных уравнений

4.1. Основные понятия. Совместность систем уравнений

Определение: ***Системой линейных алгебраических уравнений,*** содержащей m уравнений и n неизвестных, называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad\qquad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

где a_{ij}, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$, называются ***коэффициентами системы***, b_i ***– свободными членами.*** Подлежат нахождению неизвестные x_n.

Определение: Матрица коэффициентов при неизвестных $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$ называется ***основной матрицей системы***, $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$ – ***вектором-столбцом свободных членов,*** $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ ***– вектором-столбцом неизвестных.***

Тогда систему уравнений можно записать в ***матричном виде*** $A\cdot X=B$.

Определение: ***Расширенной матрицей системы*** называется матрица $\overline{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$, дополненная столбцом свободных членов.

Определение: ***Решением системы линейных уравнений*** называется совокупность чисел $c_1, c_2, \dots c_n$ или буквенных выражений, при подстановке которой вместо неизвестных $x_1, x_2, \dots x_n$ каждое уравнение системы обращается в тождество.

Определение: ***Система уравнений называется совместной,*** если она имеет хотя бы одно решение, и ***несовместной***, если она не имеет ни одного решения.

Определение: ***Определенной*** называется совместная система, имеющая единственное решение.

Определение: ***Неопределенной*** называется совместная система, имеющая бесконечное множество решений.

Решить систему – это значит выяснить, совместна она или несовместна. Если система совместна, найти ее общее решение.

Пусть дана произвольная система m линейных уравнений с n неизвестными. Ответ на вопрос об ее совместности дает теорема Кронекера-Капелли.

Теорема Кронекера-Капелли: ***Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг основной матрицы системы равен рангу расширенной матрицы.***

$$r(A)=r(\overline{A})=r$$

Правила практического поиска решений вытекают из следующих теорем:

Теорема: ***Если ранг совместной матрицы равен числу неизвестных, то система имеет единственное решение.***

Теорема: ***Если ранг совместной системы меньше числа неизвестных, то система имеет бесконечное множество решений.***

4.2. Решение линейных систем методом Крамера

Теорема: ***Система n линейных уравнений с n неизвестными имеет единственное решение тогда и только тогда, когда определитель основной матрицы отличен от нуля. Неизвестные находятся по формулам Крамера***

$$x_k=\frac{\Delta_k}{\Delta},$$

где Δ – главный определитель системы, т.е. определитель основной матрицы A, Δ_k – определитель неизвестного x_k, который получается при замене столбца с номером k в главном определителе на столбец свободных членов.

Пример 1: Решить систему: $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9, \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4, \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 18. \end{cases}$.

Решение: Запишем основную матрицу системы и матрицу-столбец свободных членов:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & -3 \\ 5 & 6 & -2 \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 18 \end{pmatrix}.$$

Вычислим определитель основной матрицы системы, например, по правилу Саррюса:

$$\begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 \cdot (-3) + 3 \cdot 2 \cdot 1 + 6 \cdot (-2) \cdot (-4) - 1 \cdot 1 \cdot 6 - (-4) \cdot 2 \cdot 5 - (-3) \cdot (-2) \cdot 3 =$$

$$\begin{matrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \end{matrix} \quad = -15 + 6 + 48 - 6 + 40 - 18 = 55.$$

Так как определитель основной матрицы системы отличен от нуля, система имеет единственное решение.

Составим и вычислим определитель Δ_1, который получается из определителя основной матрицы системы заменой первого столбца столбцом свободных членов:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 9 & -3 & 2 \\ 4 & 5 & -3 \\ 18 & 6 & -2 \end{vmatrix} = -90 + 162 + 48 - 180 + 162 - 24 = 78.$$

Определители Δ_2 и Δ_3 получаются аналогичным способом – из определителя основной матрицы системы заменой второго и третьего столбца соответственно столбцом свободных членов.

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 5 & 18 & -2 \end{vmatrix} = -32 - 135 + 72 - 40 + 216 + 36 = 117;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & -3 & 9 \\ 2 & 5 & 4 \\ 5 & 6 & 18 \end{vmatrix} = 360 - 60 + 108 - 225 - 96 + 108 = 195.$$

Неизвестные x_1, x_2, x_3 находятся по формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{78}{39} = 2, \; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{117}{39} = 3, \; x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{195}{39} = 5.$$

Ответ: $X=\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix}$.

Замечание. При решении методом Крамера системы 3-х уравнений с тремя неизвестными потребовалось вычислить 4 определителя 3-го порядка. При решении систем 4-го порядка уже потребуется вычислять пять определителей 4-го порядка, что громоздко и нерационально. Поэтому целесообразно решать методом Крамера системы не выше 3-го порядка.

4.3. Матричный метод решения систем уравнений

Запишем систему n линейных уравнений с n неизвестными в матричном виде $A\cdot X=B$, где $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n}\\ ... & ... & ... & ...\\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn}\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\...\\b_m\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\...\\x_n\end{pmatrix}$.

Если определитель основной матрицы отличен от нуля, то система уравнений называется невырожденной и ее можно решить с помощью обратной матрицы A^{-1}.

Если умножить слева обе части уравнения на матрицу A^{-1}, то получим

$$A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot B.$$

Поскольку $A^{-1}\cdot A=E$ и $E\cdot X=A^{-1}\cdot B$, то решение системы имеет вид

$$X=A^{-1}\cdot B.$$

Отыскание решения системы уравнений по данной формуле называется ***матричным способом*** решения системы.

Пример 2: Решить систему матричным методом: $\begin{cases}-2x_1+x_2+x_3=-2,\\ x_1-x_2-2x_3=-1,\\ -x_1+3x_2+2x_3=3.\end{cases}$.

Решение: Вычислим определитель основной матрицы системы:

$$\Delta=\begin{vmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -2\\ -1 & 3 & 2\end{vmatrix}\underset{S_3+S_2}{=}\begin{vmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -2\\ 0 & 2 & 0\end{vmatrix}=2\cdot(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix}=-2\cdot(4-1)=-6.$$

$\Delta\neq 0$, значит, систему можно решить матричным методом.

Найдем алгебраические дополнения:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-1 & -2\\ 3 & 2\end{vmatrix}=4,\ A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1 & -2\\ -1 & 2\end{vmatrix}=0;\ A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 3\end{vmatrix}=2;$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & 2\end{vmatrix}=1;\ A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}-2 & 1\\ -1 & 2\end{vmatrix}=-3;\ A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}-2 & 1\\ -1 & 3\end{vmatrix}=5;$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & -2\end{vmatrix}=-1;\ A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix}=-3;\ A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=1.$$

Запишем обратную матрицу: $A^{-1}=-\frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix}4 & 1 & -1\\ 0 & -3 & -3\\ 2 & 5 & 1\end{pmatrix}$. Выполним проверку:

$$A^{-1}\cdot A=-\frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix}4 & 1 & -1\\ 0 & -3 & -3\\ 2 & 5 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -2\\ -1 & 3 & 2\end{pmatrix}=-\frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix}-8+1+1 & 4-1-3 & 4-2-2\\ 0-3+3 & 0+3-9 & 0+6-6\\ -4+5-1 & 2-5+3 & 2-10+2\end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix}-6 & 0 & 0\\ 0 & -6 & 0\\ 0 & 0 & -6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E.$$

Так как $A^{-1}\cdot A=E$, обратная матрица вычислена верно. Найдем неизвестные:

$$X=A^{-1}\cdot B=-\frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix}4 & 1 & -1\\ 0 & -3 & -3\\ 2 & 5 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\ -1\\ 3\end{pmatrix}=-\frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix}-8-1-3\\ 0+3-9\\ -4-5+3\end{pmatrix}=-\frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix}-12\\ -6\\ -6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 1\end{pmatrix}.$$

Ответ: $X=\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$.

4.4. Метод последовательного исключения неизвестных (метод Гаусса)

Метод Гаусса является одним из наиболее универсальных и эффективных методов решения линейных алгебраических систем. Он основан на последовательном исключении неизвестных.

Процесс решения по методу Гаусса состоит из двух этапов:

1. **Прямой ход:** с помощью элементарных преобразований исходную матрицу приводим к ступенчатому (треугольному) виду. На ее основе составляется система, эквивалентная исходной

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1k}x_k+\ldots+a_{1n}x_n=b_1,\\ \qquad a_{22}x_2+\ldots+a_{2k}x_k+\ldots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \qquad\qquad \ldots\\ \qquad\qquad a_{kk}x_k+\ldots+a_{kn}x_n=b_k.\end{cases}$$

При этом решается вопрос о совместности системы и количестве решений.

2. **Обратный ход:** из последнего уравнения выражаем первое неизвестное x_k через остальные неизвестные. Затем подставляем x_k в предпоследнее и выражаем x_{k-1} и т.д. пока не дойдем до первого уравнения, в котором уже най-

дены все неизвестные, кроме одного. Таким образом, получим совокупность значений неизвестных, образующих решение системы.

Пример 3: Решите системы методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases}$$

Решение: 1) Запишем расширенную матрицу системы:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & 4 & -2 \end{array}\right).$$

С помощью элементарных преобразований найдем ранг основной матрицы и ранг расширенной матрицы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & 4 & -2 \end{array}\right) \sim \left|\begin{array}{c} \\ S_2 - 2S_1 \\ S_3 - 4S_1 \end{array}\right| \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & -4 & 2 \end{array}\right) \sim \left|\begin{array}{c} \\ \\ S_3 - S_2 \end{array}\right| \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$r(A) = r(\overline{A}) = 3.$$

Совместность системы доказана, т.к. ранг ее основной матрицы равен рангу расширенной матрицы.

Ранг основной матрицы равен числу неизвестных, следовательно, система является определенной и имеет единственное решение.

Запишем систему, эквивалентную заданной:

$$\begin{cases} x_1 + \ x_2 + 2x_3 = \ -1, \\ \quad -3x_2 - 2x_3 = -2, \\ \qquad\quad -2x_3 = 4. \end{cases}$$

Проведем обратный ход метода Гаусса: $x_3 = \dfrac{4}{-2} = -2$,

подставим во второе уравнение: $-3x_2 - 2 \cdot (-2) = -2, \ x_2 = 2$,

подставим в первое уравнение: $x_1 + 2 + 2 \cdot (-2) = \ -1, \ x_1 = 1$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$

4.5. Системы линейных однородных уравнений.

<u>Определение:</u> ***Система*** линейных уравнений называется ***однородной***, если все свободные члены равны нулю:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0, \\ \quad ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Однородная система всегда совместна, т.к. имеет ***нулевое*** или ***тривиальное*** решение $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$.

1. Если $r(A) = n$ ($\det A \neq 0$), однородная матрица имеет единственное тривиальное решение.
2. Если $r(A) < n$ ($\det A = 0$), однородная система имеет, кроме нулевого, ***бесконечное множество решений***.

Пример 4: Решить систему уравнений $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + 6x_2 + x_3 = 0, \\ 5x_1 + 15x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$

Решение: Найдем ранг матрицы A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 5 & 15 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{vmatrix} \\ S_2 - 2S_1 \\ S_3 - 5S_1 \end{vmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{vmatrix} \\ \\ S_2 + 3S_2 \end{vmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow r(A) = 2, \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$ – базисный минор, x_1 – свободное неизвестное.

Данная система равносильна системе

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ -x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 3x_2 = x_3, \\ x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_2 = -\frac{x_1}{3}.$$

Тогда общее решение системы имеет вид $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ -\dfrac{x_1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ответ: $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ -\dfrac{x_1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$.

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

Выбрать один или несколько правильных ответов.

1 СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ, НЕ ИМЕЮЩАЯ РЕШЕНИЙ, НАЗЫВАЕТСЯ

1) совместной
2) несовместной
3) определенной
4) неопределенной

2. СОВМЕСТНАЯ СИСТЕМА ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МОЖЕТ ИМЕТЬ

1) одно решение
2) два решения
3) бесконечное количество решений
4) ни одного решения

3. ЧТОБЫ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ИМЕЛА ЕДИНСТВЕННОЕ РЕШЕНИЕ, НУЖНО, ЧТОБЫ РАНГ ОСНОВНОЙ МАТРИЦЫ БЫЛ

1) меньше числа неизвестных
2) больше числа неизвестных
3) равен числу неизвестных
4) меньше ранга расширенной матрицы

4. РАНГ ОСНОВНОЙ МАТРИЦЫ СИСТЕМЫ РАВЕН 4, РАНГ РАСШИРЕННОЙ МАТРИЦЫ РАВЕН 4, ЧИСЛО НЕИЗВЕСТНЫХ РАВНО 5. ЗНАЧИТ, ДАННАЯ СИСТЕМА ЯВЛЯЕТСЯ

1) совместной
2) несовместной
3) определенной
4) неопределенной

5. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ИМЕЕТ ВИД: $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 1, \\ 5x_1 \qquad - 3x_3 = 2, \\ 4x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 3. \end{cases}$ ТОГДА

ПРИ РЕШЕНИИ МЕТОДОМ КРАМЕРА Δ_1 БУДЕТ ИМЕТЬ ВИД

1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 5 & 2 & -3 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix}$

2) $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 5 & 0 & -3 \\ 4 & 6 & -2 \end{vmatrix}$

$$3)\ \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 5 & 0 & 2 \\ 4 & 6 & 3 \end{vmatrix}$$

$$4)\ \begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 0 & -3 \\ 3 & 6 & -2 \end{vmatrix}$$

§5. Основные задачи аналитической геометрии

Аналити́ческая геоме́трия — раздел геометрии, который исследует простейшие геометрические объекты средствами элементарной алгебры на основе метода координат.

5.1. Расстояние между двумя точками

Расстояние между двумя точками.

Пусть $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$. Тогда

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\ .$$

Пример 1: Вычислить периметр треугольника с вершинами $A(3;\ 4)$, $B(3;\ 8)$, $C(6;\ 4)$.

Решение: $AB=\sqrt{(3-3)^2+(8-4)^2}=4$, $BC=\sqrt{(6-3)^2+(4-8)^2}=5$,

$$AC=\sqrt{(6-3)^2+(4-4)^2}=3\Rightarrow P_{ABC}=12\,.$$

Деление отрезка в данном отношении.

Координаты точки $M(x;\ y)$ отрезка AB такой, что $\dfrac{AM}{MB}=\lambda$ находятся по формулам:

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda};\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.$$

Эти формулы называются ***формулами деления отрезка в данном отношении.***

$\lambda=1$, т.е. $AM=MB$, то $x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$, $y=\dfrac{y_1+y_2}{2}$. В этом случае точка M является серединой отрезка.

Пример 2: Найти длины медиан треугольника, заданного вершинами $A(-2;\ 1)$, $B(2;\ -1)$, $C(4;\ 3)$.

Решение: Найдем координаты середины отрезка AB:

$$x_M=\frac{-2+2}{2}=0,\ y_M=\frac{1+(-1)}{2}=0\Rightarrow M(0;0)\Rightarrow CM=\sqrt{(4-0)^2+(3-0)^2}=5\,.$$

Найдем координаты середины отрезка AC:

$$x_N = \frac{-2+4}{2} = 1,\ y_N = \frac{1+3}{2} = 2 \Rightarrow N(1;2) \Rightarrow BN = \sqrt{(1-2)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{10}.$$

Найдем координаты середины отрезка *BC*:

$$x_P = \frac{2+4}{2} = 3,\ y_P = \frac{-1+3}{2} = 1 \Rightarrow P(3;1) \Rightarrow AP = \sqrt{(3+2)^2 + (1-1)^2} = 5.$$

Ответ: $CM = 5,\ BN = \sqrt{10},\ AP = 5.$

5.2. Уравнение прямой на плоскости

Общее уравнение прямой. Всякую прямую на плоскости в прямоугольных координатах можно описать уравнением 1-ой степени относительно двух переменных *x* и *y*, т.е. уравнением вида $Ax + By + C = 0$.

Определение: Уравнение вида $Ax + By + C = 0$ называется ***общим уравнением прямой.***

Частные случаи:

1. $C=0$ – прямая проходит через начало координат.
2. $A=0$ – прямая параллельна оси *Ox*.
3. $B=0$ – прямая параллельна оси *Oy*.
4. $A\neq 0$, $B=C=0$ – ось *Oy*.
5. $B \neq 0,\ A = C = 0$ – ось *Ox*.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом

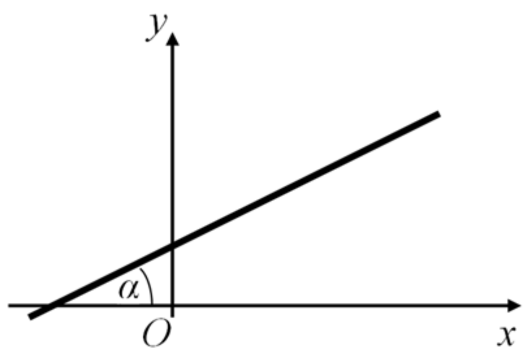


Рис. 5

Определение: ***Под углом*** $\alpha\ (0 \le \alpha < \pi)$ ***наклона прямой*** понимается угол, который образует прямая с положительным направлением оси *Ox* (рис. 5).

Определение: ***Уравнением прямой с угловым коэффициентом*** называется уравнение вида

$$y = kx + b,$$

где $tg\alpha = k$ – угловой коэффициент.

Пример 3: Написать уравнение прямой, проходящей через точку (1; –3) и образующей с осью *Ox* угол $\alpha = arctg2$.

Решение: Найдем угловой коэффициент $k = tg\alpha = tg(arctg2) = 2 \Rightarrow$ уравнение имеет вид $y = 2x + b$. Зная, что прямая проходит через точку (1; –3), найдем *b*: $-3 = 2\cdot 1 + b \Rightarrow b = -5 \Rightarrow$ уравнение прямой имеет вид $y = 2x - 5$

Пример 4: Найти угловой коэффициент прямой $6x - 3y + 7 = 0$.

Решение: выразим переменную *y* через *x*: $-3y = -6x - 7,\ y = 2x + \frac{7}{3}$ – уравнение прямой с угловым коэффициентом $\Rightarrow k = 2$.

Уравнение прямой, проходящей через две данные точки.

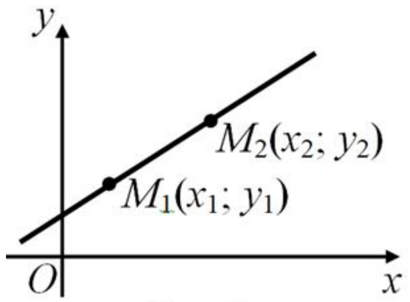


Рис. 6

Определение: Уравнение вида

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

называется ***уравнением прямой, проходящей через две данные точки*** (рис. 6).

Определение: Уравнение вида

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}$$

называется ***каноническим уравнением прямой.***

Пример 5: Составить уравнение прямой, проходящей через две данные точки $M_1(3; -6)$ и $M_2(-5; 1)$

Решение: Воспользуемся формулой

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \Rightarrow \frac{x - 3}{-5 - 3} = \frac{y + 6}{1 + 6} \Rightarrow \frac{x - 3}{-8} = \frac{y + 6}{7}.$$

Ответ: $\dfrac{x - 3}{-8} = \dfrac{y + 6}{7}$.

Уравнение прямой «в отрезках».

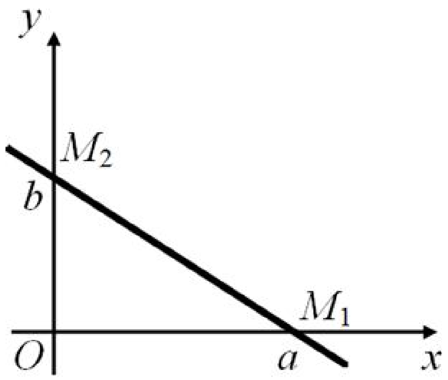


Рис. 7

Определение: Уравнение вида

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

называется ***уравнением прямой «в отрезках»***, где a и b – отрезки, отсекаемые прямой на осях Ox и Oy соответственно (рис. 7).

Пример 6: Найти уравнение прямой $5x + 3y + 2 = 0$ *«в отрезках»*.

Решение: Перенесем 2 в правую сторону и разделим обе части уравнения на –2:

$5x + 3y = -2,\ \dfrac{5x}{-2} + \dfrac{3y}{-2} = 1 \Rightarrow \dfrac{x}{-2/5} + \dfrac{y}{-2/3} = 1$ – уравнение прямой *«в отрезках»*.

5.3. Угол между двумя прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых

Таблица 1

Взаимное расположение прямых на плоскости

Уравнение прямой	Угол между прямыми	Условие параллельности	Условие перпендикулярности
$A_1x + B_1y + C_1 = 0$ $A_2x + B_2y + C_2 = 0$	$\cos\varphi = \dfrac{\lvert A_1A_2 + B_1B_2 \rvert}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$	$\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2}$	$A_1A_2 + B_1B_2 = 0$
$\dfrac{x - x_1}{m_1} = \dfrac{y - y_1}{n_1}$, $\dfrac{x - x_2}{m_2} = \dfrac{y - y_2}{n_2}$	$\cos\varphi = \dfrac{\lvert m_1m_2 + n_1n_2 \rvert}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2}}$	$\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2}$	$m_1m_2 + n_1n_2 = 0$
$y = k_1x + b_1$ $y = k_2x + b_2$	$tg\varphi = \left\lvert \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} \right\rvert$	$k_1 = k_2$	$k_2 = -\dfrac{1}{k_1}$

Пример 8: Найти угол между прямыми $y = 4x - 7$ и $y = -6x + 3$.

Решение: Воспользуемся формулой для нахождения угла между прямыми с угловыми коэффициентами

$$tg\varphi = \left| \frac{-6 - 4}{1 + 4 \cdot (-6)} \right| = \frac{10}{23} \Rightarrow \varphi = arctg\frac{10}{23}.$$

5.4. Расстояние от точки до прямой

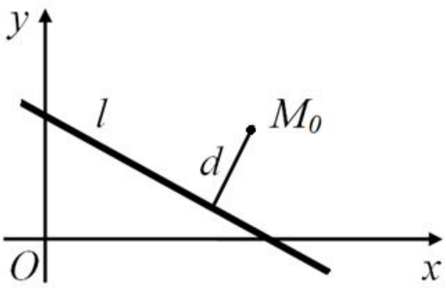


Рис. 8

Пусть заданы прямая $l: Ax + By + C = 0$ и точка $M_0(x_0;\ y_0)$ (рис.8). Тогда расстояние d от точки M_0 до прямой равно

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Пример 10: Найти расстояние от точки $M_0(2; -1)$ до прямой $3x + 4y - 22 = 0$.

Решение: Прямая задана общим уравнением, поэтому воспользуемся формулой для вычисления расстояния от точки до прямой

$$d = \frac{|3 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) - 22|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|-20|}{5} = 4.$$

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

Выберите правильный ответ.

1. ПРЯМАЯ, ЗАДАННАЯ УРАВНЕНИЕМ $x+3y=0$, БУДЕТ

    1) параллельна оси *Ox*
    2) параллельна оси *Oy*
    3) проходить через начало координат
    4) пересекать оси координат

2. ПРЯМАЯ $\dfrac{x}{5}-\dfrac{y}{3}=1$ ЗАДАНА УРАВНЕНИЕМ. УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ ЯВЛЯЕТСЯ

    1) общим уравнением
    2) уравнением с угловым коэффициентом
    3) каноническим уравнением
    4) уравнением в отрезках

3. ДАНЫ ПРЯМЫЕ l_1 И l_2. УСЛОВИЕ ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ ПРЯМЫХ ИМЕЕТ ВИД

    1) $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}$
    2) $m_1m_2+n_1n_2=0$
    3) $k_2=\dfrac{1}{k_1}$
    4) $k_1=-k_2$
    5) $A_1A_2-B_1B_2=0$

4. ДАНЫ ПРЯМЫЕ l_1 И l_2. УСЛОВИЕ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ПРЯМЫХ ИМЕЕТ ВИД

    1) $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}$
    2) $m_1m_2+n_1n_2=0$
    3) $k_2=\dfrac{1}{k_1}$
    4) $k_1=-k_2$
    5) $A_1A_2-B_1B_2=0$

5. УГОЛ МЕЖДУ ПРЯМЫМИ $3x+2y-1=0$ И $5x-y+4=0$ РАВЕН

    1) 0^{o}
    2) 30^{o}

3) 45°
4) 60°
5) 90°

§6. Кривые второго порядка на плоскости

6.1. Основные понятия

Определение: ***Кривой второго порядка*** называется линия, уравнение которой в декартовой системе координат есть уравнение второй степени

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

где A, B, C не равны нулю одновременно.

Геометрическим образом данного уравнения служат три линии – либо эллипс, либо гипербола, либо парабола, либо их вырожденные варианты.

6.2. Окружность

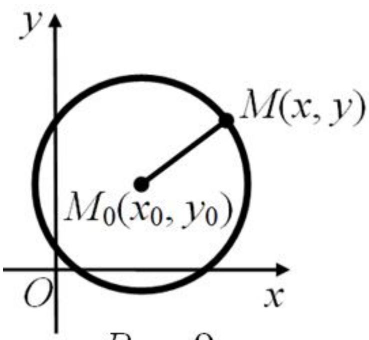


Рис. 9

Определение: ***Окружностью*** называется множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой центром (рис. 9).

Из условия $M_0M = R$ получаем уравнение

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = R$$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

Данное уравнение называют ***каноническим уравнением окружности.***

В частности, полагая $x_0 = 0$ и $y_0 = 0$, получим уравнение окружности с центром в начале координат

$$x^2 + y^2 = R^2$$

6.3. Эллипс

Определение: ***Эллипсом*** называется множество точек плоскости, сумма расстояний которых до двух данных точек этой плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная, большая, чем расстояние между фокусами (рис. 10).

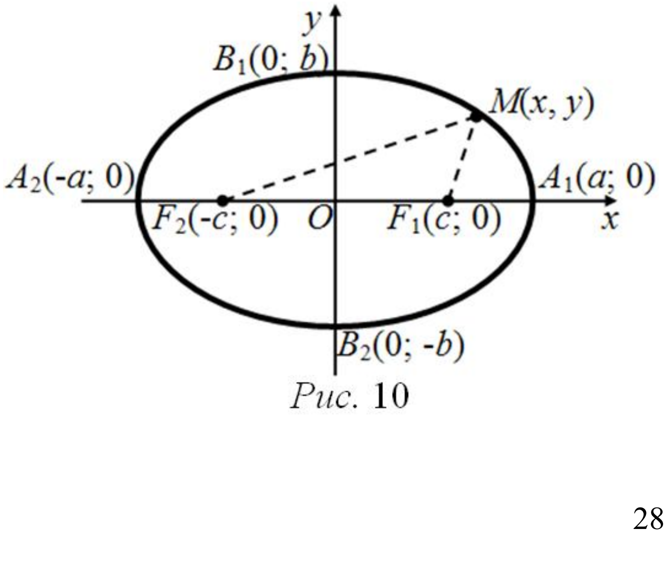


Рис. 10

Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка кривой, фокусы которой лежат на оси Ox и имеют координаты $F_1(c; 0)$, $F_2(-c; 0)$, тогда

$$MF_1 + MF_2 = const$$

Определение: Уравнение вида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ называется ***каноническим уравнением эллипса с центром в начале координат и полуосями a (большая полуось) и b (малая полуось).***

Числа a, b, c связаны следующим соотношением $a^2-c^2=b^2$

Определение: Отношение расстояния между фокусами к длине большой оси эллипса называется ***эксцентриситетом*** и характеризует форму (степень сжатия) эллипса

$$\varepsilon=\frac{2c}{2a}=\frac{c}{a}.$$

Эллипс – кривая, обладающая центральной и осевой симметрией. Для построения эллипса достаточно знать координаты центра и четырех его вершин $A_1(a;0)$, $A_2(-a;0)$, $B_1(0;b)$, $B_2(0;-b)$.

6.4. Гипербола

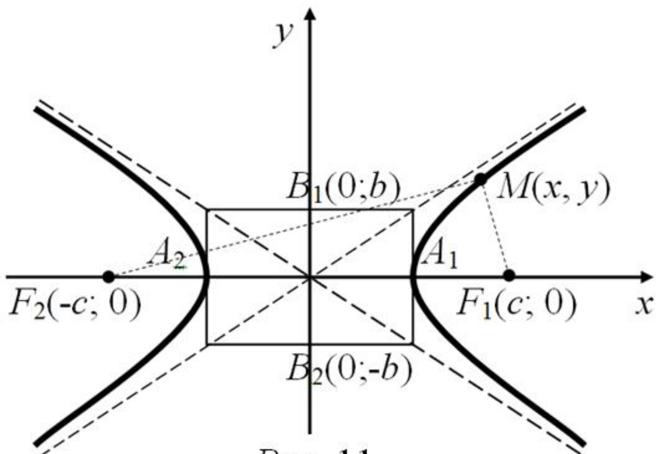


Рис. 11

Определение: ***Гиперболой*** называется множество точек плоскости, модуль разности расстояний от каждой из которых до двух данных точек этой плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная, меньшая, чем расстояние между фокусами (рис. 11).

Пусть $M(x,y)$ - произвольная точка кривой, фокусы которой лежат на оси Ox и имеют координаты $F_1(c;0)$, $F_2(-c;0)$, тогда

$$|MF_1-MF_2|=const$$

Каноническое уравнение гиперболы с центром в начале координат имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

где $b^2=c^2-a^2$.

Определение: Точки $A_1(a;0)$ $A_2(-a;0)$ называются ***вершинами гиперболы,*** отрезок $A_1A_2=2a$ – ***действительной осью,*** отрезок $B_1\ B_2=2b$ – ***мнимой осью.*** Прямоугольник со сторонами $2a$ и $2b$ называется ***основным прямоугольником гиперболы.***

Гипербола симметрична относительно начала координат и координатных осей.

Гипербола в отличие от эллипса является незамкнутой кривой, имеющей ***асимптоты*** – прямые, к которым ветви гиперболы неограниченно приближаются.

Уравнение асимптот $y=\frac{b}{a}x$ и $y=-\frac{b}{a}x$.

<u>Определение:</u> ***Эксцентриситетом гиперболы*** называется отношение расстояния между фокусами к величине действительной оси

$$\varepsilon=\frac{c}{a}$$

Схема построения гиперболы:

1. Строим основной прямоугольник гиперболы с центром в начале координат.
2. Через центр и вершины прямоугольника проводим асимптоты гиперболы.
3. Отмечаем вершины гиперболы на действительной оси и строим ее.

Рассмотрим другой вариант гиперболы.

<u>Определение</u>: Уравнение

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

является ***каноническим уравнением сопряженной гиперболы*** с центром в начале координат и действительной полуосью b и мнимой полуосью a (рис. 12).

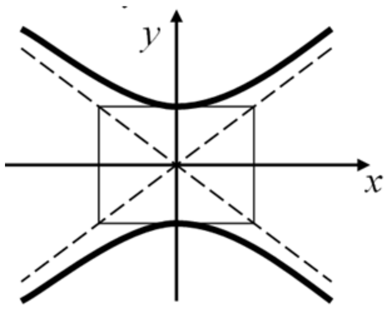


Рис. 12

6.5. Парабола

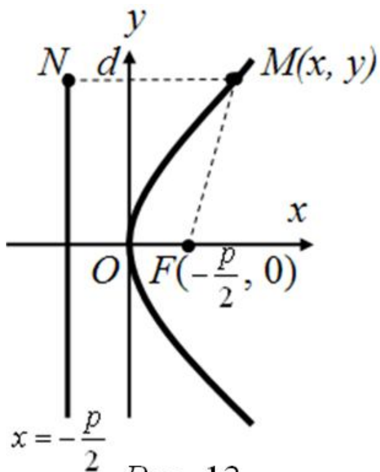


Рис. 13

<u>Определение:</u> ***Параболой*** называется множество точек плоскости, каждая из которых равноудалена от данной точки, называемой ***фокусом***, и данной прямой, называемой ***директрисой***. Расстояние от фокуса F до директрисы называется ***параметром параболы*** p ($p>0$) (рис. 13).

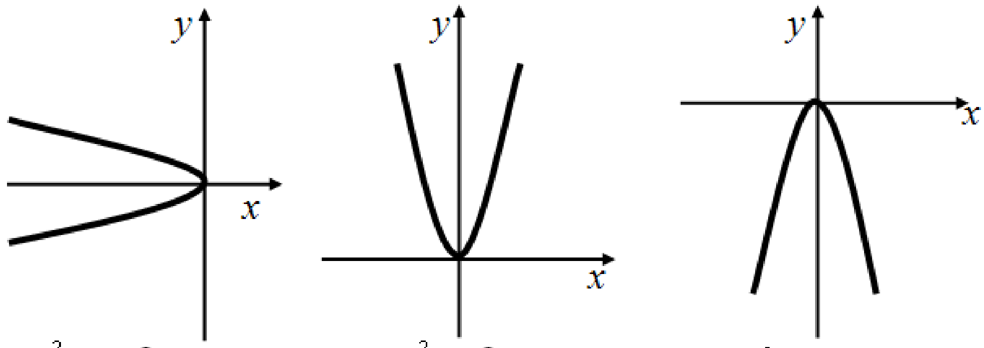
Пусть $M(x, y)$ - произвольная точка кривой, фокус имеет координаты $F(\frac{p}{2},\ 0)$, а уравнение директрисы имеет вид $x=-\frac{p}{2}$. Тогда согласно определению параболы

$$MF = MN$$

Каноническое уравнение параболы, симметричной относительно оси абсцисс с вершиной в начале координат имеет вид

$$y^2=2px.$$

Другие виды парабол:



$y^2 = -2px$ $\qquad$ $x^2 = 2py$ $\qquad$ $x^2 = -2py$

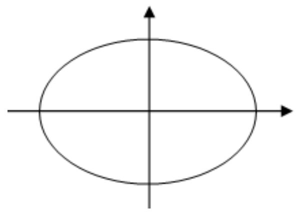
Для построения параболы необходимо знать:

1. Координаты вершины параболы
2. Ось симметрии (она параллельна той оси, координата которой входит в уравнение в первой степени).
3. Направление ветвей.

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

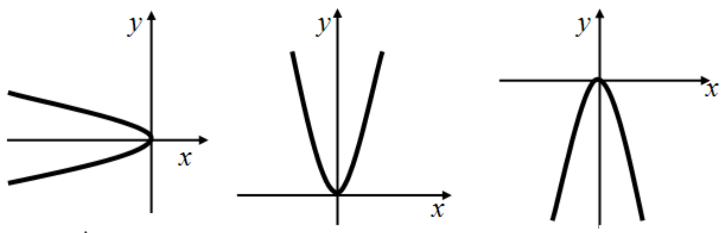
Выбрать один или несколько правильных ответов.

1. НА РИСУНКЕ ИЗОБРАЖЕН ГРАФИК



1) окружности
2) эллипса
3) гиперболы
4) параболы

2. НАЙДИТЕ СООТВЕТСТВИЕ МЕЖДУ ГРАФИКОМ И ФОРМУЛОЙ



А $\qquad$ Б $\qquad$ В

1) $y^2 = 2px$
2) $x^2 = -2py$
3) $y^2 = -2px$
4) $x^2 = 2py$

А	*Б*	*В*

3. КРИВАЯ ЗАДАНА УРАВНЕНИЕМ $\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{4}=1$. ВЫБЕРИТЕ ПРАВИЛЬНОЕ УТВЕРЖДЕНИЕ

1) действительная ось равна 2, а мнимая – 5
2) действительная ось равна 5, а мнимая – 2
3) действительная ось равна 4, а мнимая – 25
4) действительная ось равна 25, а мнимая – 4

4. КРИВАЯ ЗАДАНА УРАВНЕНИЕМ $x^2+y^2=16$. ЭТО КАНОНИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

1) окружности
2) эллипса
3) гиперболы
4) параболы

5. ОСНОВНОЙ ПРЯМОУГОЛЬНИК ИСПОЛЬЗУЕТСЯ ПРИ ПОСТРОЕНИИ

1) окружности
2) эллипса
3) гиперболы
4) параболы

§7. Прямая и плоскость в пространстве

7.1. Уравнение плоскости

Теорема: ***Всякую плоскость в прямоугольных координатах можно описать уравнением, линейным относительно трех переменных*** x, y ***и*** z***, т.е.***

$$Ax+By+Cz+D=0$$

Определение: Уравнение вида $Ax+By+Cz+D=0$ называется ***общим уравнением плоскости***.

Частные случаи:

1. Если $D = 0$, то плоскость $Ax+By+Cz=0$ проходит через начало координат:

2. Если $C = 0$, то плоскость $Ax+By+D=0$ параллельна оси Oz; $B = 0$ – $Ax+Cz+D=0$ параллельна оси Oy; $A = 0$ – $By+Cz+D=0$ параллельна оси Ox.

3. Если $C = D = 0$, то плоскость $Ax+By=0$ проходит через ось Oz; $A = D = 0$ – $By+Cz=0$ проходит через ось Ox; $B = D = 0$ – $Ax+Cz=0$ – проходит через ось Oy.

4. Если $A = B = 0$ плоскость $Cz+D=0$ параллельна плоскости Oxy; $B = C = 0$ – $Ax+D=0$ параллельна плоскости Oyz; $A = C = 0$ – $By+D=0$ параллельна плоскость Oxz.

5. Если $A = B = D = 0$, то уравнение имеет вид $z = 0$ – уравнение плоскости Oxy. Аналогично $y = 0$ – уравнение плоскости Oxz; $x = 0$ – уравнение плоскости Oyz.

7.2. Угол между плоскостями

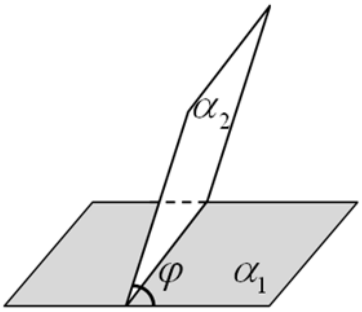


Рис. 14

Условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей.

Пусть даны две плоскости:

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \text{ и } A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 .$$

Определение: ***Углом между плоскостями*** называется двугранный угол, который измеряется вписанным в него линейным углом.

Величина угла может быть найдена по формуле

$$\cos\varphi = \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} .$$

Пример 1: Найти угол между плоскостями $x - 2y + 2z - 8 = 0$ и $x + z - 6 = 0$

Решение: Подставим в формулу коэффициенты перед неизвестными и найдем угол:

$$\cos\varphi = \frac{|1\cdot 1 - 2\cdot 0 + 2\cdot 1|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} \cdot \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4} .$$

Если плоскости перпендикулярны, то $A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0$.

Это есть ***условие перпендикулярности плоскостей***.

Если плоскости параллельны, то $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$.

Это есть ***условие параллельности плоскостей***.

Пример 2: При каких m и p плоскости $-2x + 3y + mz - 1 = 0$ и $px - 6y + 4z + 3 = 0$ будут параллельны?

Решение: Если плоскости параллельны, то должно выполняться условие

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \Rightarrow \frac{-2}{p} = \frac{3}{-6} = \frac{m}{4} \Rightarrow \frac{-2}{p} = \frac{1}{-2} = \frac{m}{4} \Rightarrow p = 4, m = -2 .$$

Ответ: $p = 4, m = -2$.

7.3. Расстояние от точки до плоскости

Определение: ***Расстояние*** d ***от данной точки*** $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ ***до данной плоскости*** $Ax + By + Cz + D = 0$ находится по формуле

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} .$$

Пример3: Найти объем куба, одна из вершин которого в точке $M_1(2; –3; 5)$, а грань лежит в плоскости $-x+2y-2z+16=0$.

Решение: Выясним, принадлежит ли данная вершина плоскости. Для этого подставим координаты точки в уравнение плоскости:

$-2+2\cdot(-3)-2\cdot 5+16=-2\neq 0 \Rightarrow$ точка M_1 не лежит на данной грани, поэтому расстояние от точки до плоскости будет равно ребру куба:

$$d=\frac{|-2+2\cdot(-3)-2\cdot 5+16|}{\sqrt{(-1)^2+2^2+(-2)^2}}=\frac{|-2|}{3}=\frac{2}{3}.$$

$$V=d^3 \Rightarrow V=\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}.$$

7.4. Уравнения прямой в пространстве

Уравнение прямой, проходящей через две точки.

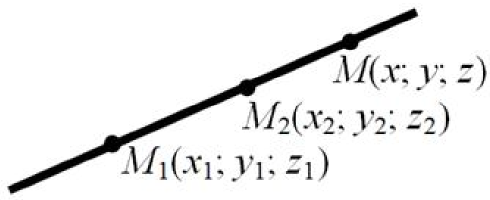


Рис. 15

Пусть даны две точки прямой $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$. Возьмем произвольную точку прямой $M(x; y; z)$ (рис. 15), тогда уравнение прямой имеет вид

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Пример 4: Составить уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(0; 1; –2)$ и $M_2(–3; 4; –1)$.

Решение: Подставим координаты точек в уравнение прямой

$$\frac{x-0}{-3-0}=\frac{y-1}{4-1}=\frac{z+2}{-1+2}\Rightarrow\frac{x}{-3}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+2}{1}.$$

Ответ: $\frac{x}{-3}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+2}{1}$.

7.5. Угол между прямой и плоскостью

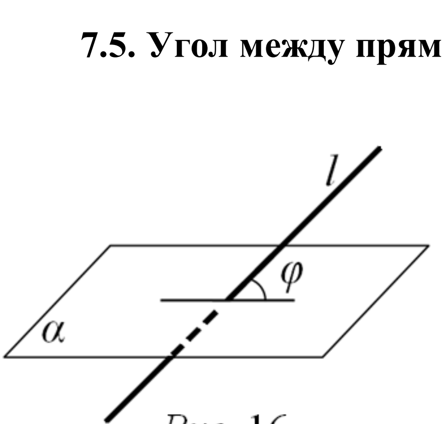


Рис. 16

Пусть плоскость задана уравнением $Ax+By+Cz+D=0$, а прямая – уравнениями $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$.

Определение: ***Углом φ между прямой и плоскостью*** называется меньший из двух смежных углов, образованных прямой и ее проекцией на плоскость (рис. 16).

Величина угла может быть найдена по формуле

$$\sin\varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$$

Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости.

Определение: Если прямая и плоскость не имеют общих точек, то они называются ***параллельными*** (рис. 17).

Тогда условием параллельности прямой и плоскости является:

$$Am + Bn + Cp = 0.$$

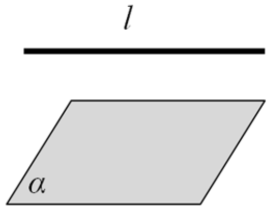


Рис. 17

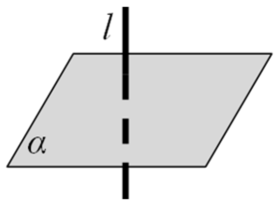


Рис. 18

Определение: Прямая называется ***перпендикулярной*** плоскости, если она образует с плоскостью прямой угол (рис. 18).

Тогда условиями перпендикулярности прямой и плоскости являются:

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}.$$

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

Выберите правильный ответ.

1. ПЛОСКОСТЬ, ЗАДАННАЯ УРАВНЕНИЕМ $x + 3y - 5 = 0$, ПАРАЛЛЕЛЬНА

   1) оси Oz
   2) оси Oy
   3) плоскости Oxz
   4) плоскости Oyz

2. УСЛОВИЕ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ПЛОСКОСТЕЙ $A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$ И $A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$ ИМЕЕТ ВИД

   1) $A_1A_2 - B_1B_2 - C_1C_2 = 0$
   2) $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$
   3) $A_1A_2 - B_1B_2 + C_1C_2 = 0$
   4) $A_1A_2 + B_1B_2 - C_1C_2 = 0$

3. ПЛОСКОСТИ $-2x + 3y + mz - 1 = 0$ И $px - 6y + 4z + 3 = 0$ ПАРАЛЛЕЛЬНЫ ЕСЛИ

   1) m=2 и p=4
   2) m= –2 и p=4
   3) m= 4 и p= –2
   4) m= –4 и p=2

4. УСЛОВИЕ ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ ПРЯМОЙ $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ И ПЛОСКОСТИ $Ax+By+Cz+D=0$ ИМЕЕТ ВИД

1) $Am-Bn+Cp=0$
2) $Am+Bn-Cp=0$
3) $Am-Bn-Cp=0$
4) $Am+Bn+Cp=0$

5. УГОЛ МЕЖДУ ПЛОСКОСТЯМИ $2x+3y-4z+4=0$ И $5x-2y+z-3=0$ РАВЕН

1) 0^{o}
2) 30^{o}
3) 45^{o}
4) 60^{o}
5) 90^{o}

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

§8. Функция

8.1. Числовые множества. Числовые промежутки

Определение: Множества, элементами которых являются числа, называются ***числовыми.***

Примеры числовых множеств:

N – множество натуральных чисел. $N = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$;

Z – множество целых чисел. $Z = \{0, \pm1, \pm2, \pm3, \dots, \pm n, \dots\}$;

Q – множество рациональных чисел. $Q = \left\{\dfrac{m}{n}\colon m \in Z,\ n \in N\right\}$;

R – множество действительных чисел.

На числовых множествах могут быть заданы следующие арифметические операции, результаты которых не выходят за рамки данного множества:

- на множестве натуральных чисел – сложение и умножение;
- на множестве целых чисел – сложение, вычитание, умножение;
- на множестве рациональных чисел – сложение, вычитание, умножение и деление;
- на множестве действительных чисел – сложение, вычитание, умножение, деление и извлечение корня n-й степени (кроме корня четной степени из отрицательных чисел).

Множество действительных чисел обладает следующими свойствами:

1) ***упорядоченность*** – для любых различных чисел a и b либо $a < b$, либо $a > b$;

2) ***плотность*** – между двумя различными числами a и b бесконечно много действительных чисел;

3) ***непрерывность*** – каждому числу соответствует определенная (единственная) точка на числовой оси.

Определение: ***Числовыми промежутками (интервалами)*** называют подмножества множества действительных чисел, имеющие вид:

$[a;b] = \{x \in R : a \le x \le b\}$ – отрезок (замкнутый промежуток);

$(a;\ b) = \{x \in R : a < x < b\}$ – интервал (открытый промежуток);

$[a;\ b) = \{x \in R : a \le x < b\}$, $(a;\ b] = \{x \in R : a < x \le b\}$ – полуоткрытые отрезки (или полузакрытые интервалы);

$(-\infty;\ b] = \{x \in R : x \le b\}$, $[a;\ +\infty) = \{x \in R : x \ge a\}$ – бесконечные отрезки;

$(-\infty;\ b) = \{x \in R : x < b\}$, $(b; -\infty) = \{x \in R : x > b\}$ – бесконечные интервалы (промежутки).

Числа a и b называются концами промежутков, символы $-\infty$ и $+\infty$ – это не числа, а символы для обозначения бесконечного удаления точек от начала отсчета.

Определение: δ***-окрестностью точки*** x_0 называется интервал $(x_0-\delta;\ x_0+\delta\ )$ или $|x-x_0|<\delta$.

8.2. Понятие функции. Способы задания функции

Понятие функции является одним из основных понятий математического анализа. Оно связано с установлением зависимости между элементами множеств.

Пусть даны два непустых множества *X* и *Y*.

Определение: Соответствие *f*, которое каждому элементу $x \in X$ сопоставляет один и только один элемент $y \in Y$, называется ***функцией*** и записывается $y = f(x)$.

Говорят, что функция *f* отображает множество *X* на множество *Y*.

Определение: Если X и Y – числовые множества, то функция будет являться ***числовой.*** Множество *X* называется ***областью определения функции,*** обозначается $D(f)$. Множество *Y* называется ***областью значений функции,*** обозначается $E(f)$.

Переменная *x* называется в данном случае ***независимой переменной или аргументом функции,*** переменная *y* – ***зависимой переменной или значением функции.***

Если область определения функции не указана, то под ней подразумевается ***естественная область определения***, то есть множество тех значений переменной *X*, которые не противоречат алгебраическому смыслу выражения. При **нахождении естественной области определения** нужно учитывать **следующие правила:**

1) если в выражении для функции имеется корень четной степени, то подкоренное выражение должно быть неотрицательно;

2) если в выражении для функции имеется дробь, то ее знаменатель не должен быть равен нулю;

3) остальные ограничения будут зависеть от областей определения основных элементарных функций, входящих в состав функции.

Пример 1: Найдем области определения следующих функций:

а) $y = \ln(2x-1)$.

Решение: Выражение, стоящее под знаком логарифма, должно быть положительным, поэтому запишем следующее неравенство и решим его относительно *x*:

$$2x-1>0 \Rightarrow x>\frac{1}{2} \text{ или можно записать: } D(f)=(\frac{1}{2};+\infty).$$

б) $y=\sqrt{3+x}-2^x$.

Решение: Показательная функция определена на всем числовом интервале, а подкоренное выражение должно быть неотрицательным, поэтому запишем следующее неравенство и решим его относительно *x*:

$3+x\ge 0 \Rightarrow x\ge -3$ или можно записать: $D(f)=[-3;+\infty)$.

в) $y=\dfrac{4^{\ln x}}{x^2-9}$.

Решение: Выражение, стоящее под знаком логарифма, должно быть положительным, а знаменатель дроби не должен обращаться в нуль, поэтому составим систему неравенств и решим её относительно x:

$$\begin{cases} x>0 \\ x^2-9\ne 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0 \\ (x-3)(x+3)\ne 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0 \\ x\ne 3 \\ x\ne -3 \end{cases} \Rightarrow D(f)=(0;3)\cup(3;+\infty).$$

Способы задания функций:

1) *графический* – при помощи графика;

2) *табличный* – с помощью таблицы значений аргумента и соответствующих им значений функции;

3) *аналитический* – с помощью формулы или системы формул.

8.3. Основные характеристики функций

Четность функции

Определение: Функция $y = f(x)$, определенная на множестве D, называется ***четной,*** если для любого x из области определения $f(-x)=f(x)$; ***нечетной,*** если $f(-x)=-f(x)$.

График четной функции симметричен относительно оси Oy, а нечетной – относительно начала координат.

Пример 2: Установить четность или нечетность следующих функций.

а) $y(x)=3^x+3^{-x}$.

Решение: Найдем значение функции от аргумента $-x$:

$$y(-x)=3^{-x}+3^{-(-x)}=3^{-x}+3^x$$

$y(-x) = y(x)$, следовательно, функция четная.

б) $y(x)=5x^3+\sin x$.

Решение: Найдем значение функции от аргумента $-x$:

$$y(-x)=5(-x)^3+\sin(-x)=-5x^3-\sin x=-(5x^3+\sin x)=-y(x)$$

$y(-x) = -y(x)$, следовательно, функция нечетная.

в) $y(x)=\dfrac{x^2-4}{x+5}$.

Решение: Найдем значение функции от аргумента $-x$:

$$y(-x)=\frac{(-x)^2-4}{-x+5}=\frac{x^2-4}{-x+5}\Rightarrow y(-x)\ne y(x),\ y(-x)\ne -y(x).$$

Свойство четности-нечетности не выполняется, следовательно, функция общего вида.

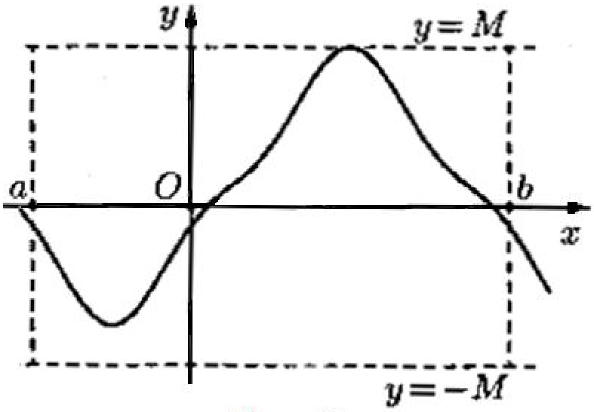


Рис. 19

Ограниченность

Определение: Функцию $y = f(x)$, определенную на множестве D, называют ***ограниченной на этом множестве*** (рис.20), если существует такое число М > 0, что для всех $x \in D$ выполняется неравенство

$$\left|f\left(x\right)\right| \leq M$$

Периодичность

Определение: Функция $y = f(x)$, определенная на множестве D, называется ***периодической на этом множестве,*** если существует такое число $T > 0$, что при каждом $x \in D$ значение $f(x+T)=f(x)$. При этом число T называется периодом функции.

Если T – период функции, то ее периодом будут также числа $m \cdot T$, где $m = \pm 1; \pm 2; \pm 3; \ldots$.

8.4. Понятия обратной и сложной функций

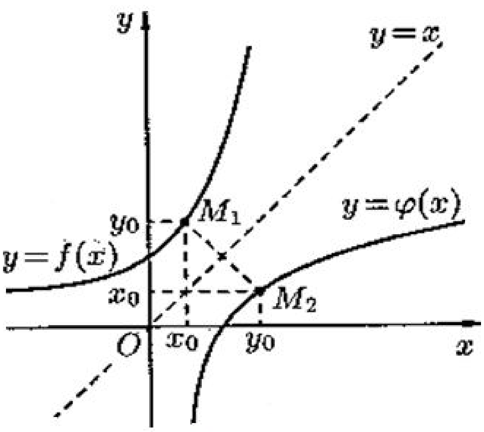


Рис.20

Пусть задана функция $y=f(x)$ с областью определения D и множеством значений E.

Определение: Если каждому значению $y \in E$ соответствует единственное значение $x \in D$, то определена функция $x=\varphi(y)$ с областью определения E и множеством значений D. Эта функция называется ***обратной к функции*** $y=f(x)$ и записывается в виде

$$x = \varphi\left(y\right) = f^{-1}\left(y\right).$$

Графики взаимно обратных функций $y=f(x)$ и $x=\varphi(y)$ ***симметричны относительно биссектрисы*** первого и третьего координатных углов (рис. 20).

Определение: Пусть функция $y=f(u)$ определена на множестве D, а функция $u=\varphi(x)$ на множестве D_1, причем для любого x из множества D_1 соответствующее значение $u = \varphi\left(x\right) \in D$. Тогда на множестве D_1 определена функция $u = f\left(\varphi\left(x\right)\right)$, которая называется ***сложной функцией*** от x (или ***суперпозицией*** данных функций).

Переменную $u=\varphi(x)$ называют ***промежуточным аргументом сложной функции.***

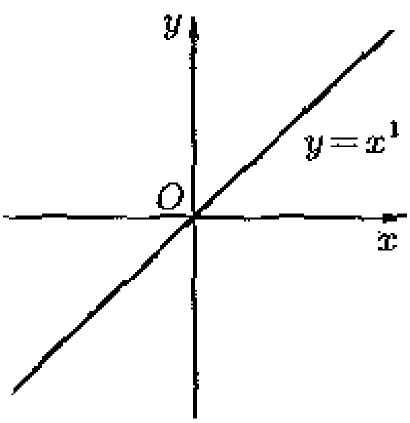
8.5. Основные элементарные функции и их графики

1. ***Степенная функция*** $y = x^{\alpha}, \alpha \in R$.

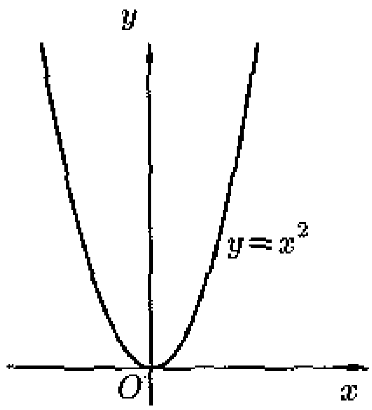
При четных целых значениях α функция будет четной, её график будет симметричен относительно оси y. При нечетных целых значениях α функция будет нечетной, её график будет симметричен относительно начала координат.

При дробных значениях α функция не всегда будет обладать какой-либо симметрией.

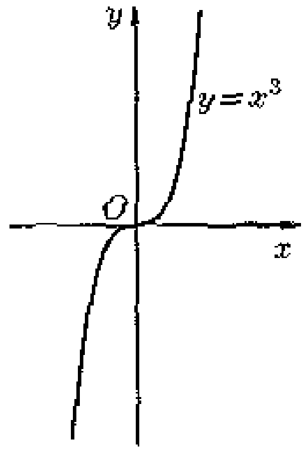
$D(f) = (-\infty; +\infty)$
$E(f) = (-\infty; +\infty)$



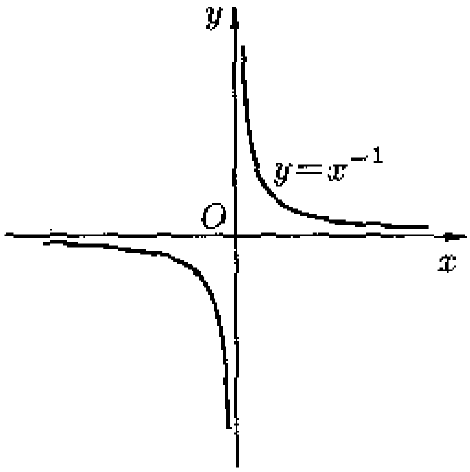
$D(f) = (-\infty; +\infty)$
$E(f) = [0; +\infty)$



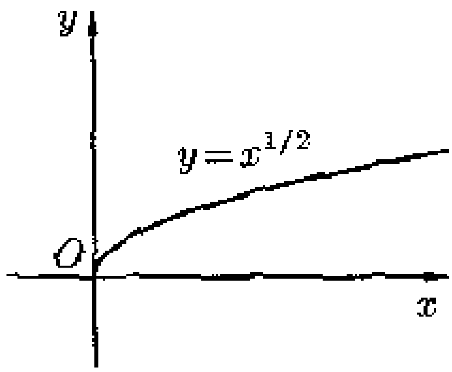
$D(f) = (-\infty; +\infty)$
$E(f) = (-\infty; +\infty)$



$D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$
$E(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

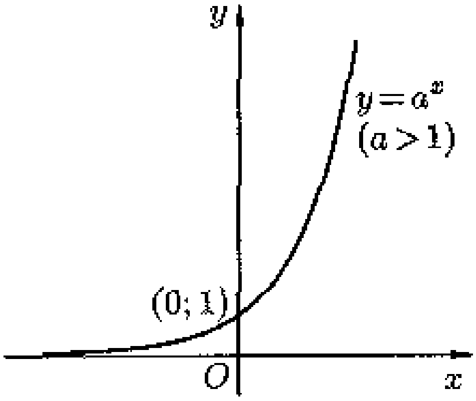


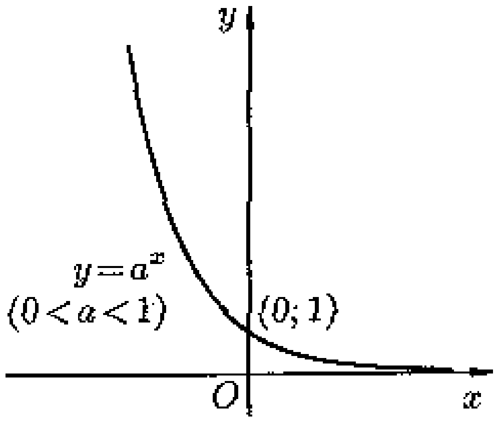
$D(f) = [0; +\infty)$ $E(f) = [0; +\infty)$



2. ***Показательная функция*** $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$.
Является функцией общего вида.

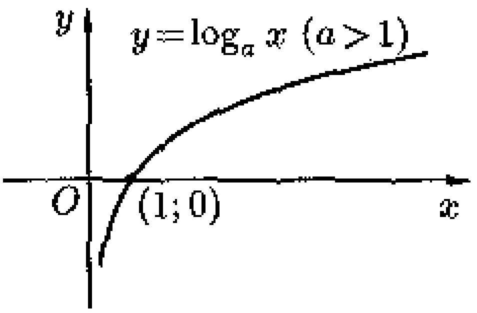
$$D(f) = (-\infty; +\infty) \quad E(f) = \left(0; +\infty\right)$$

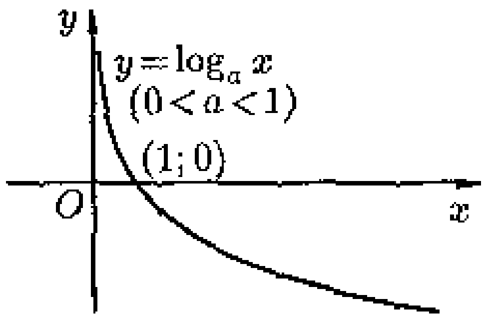




3. ***Логарифмическая функция*** $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$.
Является функцией общего вида.

$$D(f) = (0; +\infty) \quad E(f) = (-\infty; +\infty)$$

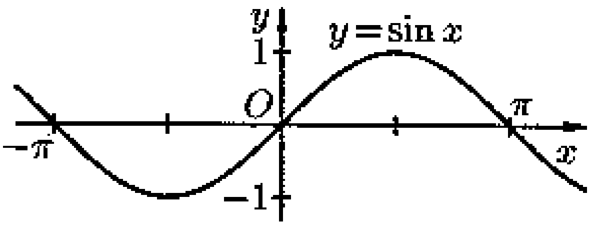


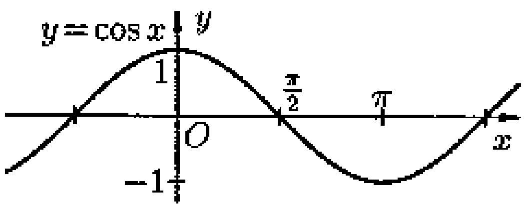


4. ***Тригонометрические функции*** $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$.

Все тригонометрические функции являются периодическими и обладают свойством симметрии, причем $y = \cos x$ является четной, а остальные – нечетные

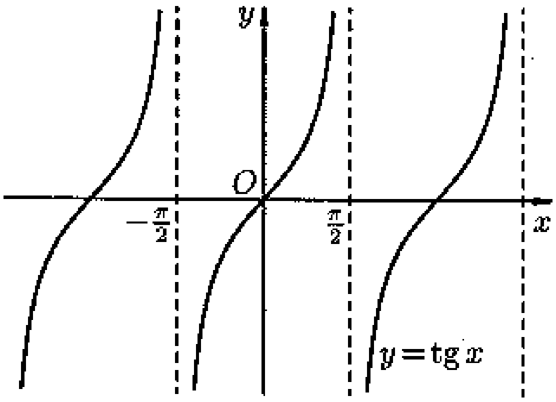
$$D(f) = (-\infty; +\infty) \; E(f) = [-1; 1]$$





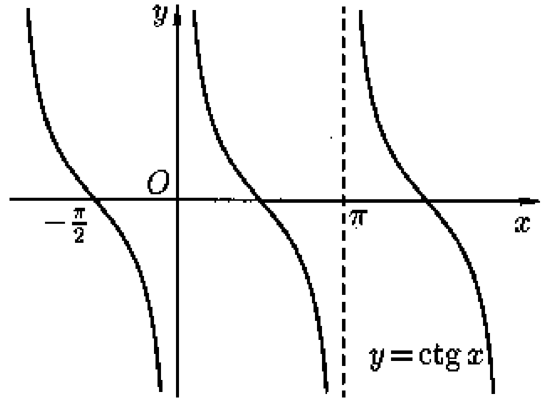
$$D(f)=\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi n\right),\, n\in Z$$

$$E(f)=\left(-\infty;+\infty\right)$$



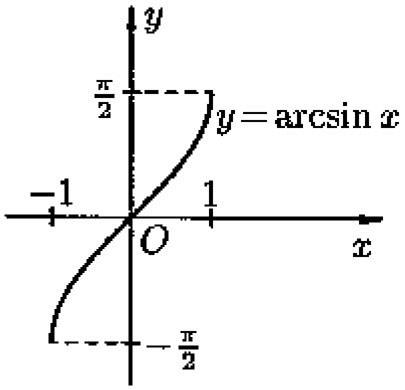
$$D(f)=(\pi n;\pi+\pi n),\, n\in Z$$

$$E(f)=\left(-\infty;+\infty\right)$$

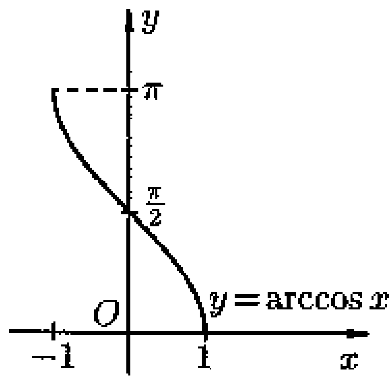


5. ***Обратные тригонометрические функции***
$y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\mathrm{arctg}\, x$, $y=\mathrm{arcctg}\, x$.

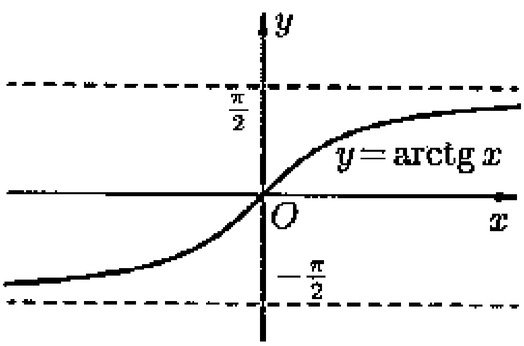
$$D(f)=[-1;1]\ E(f)=[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$$



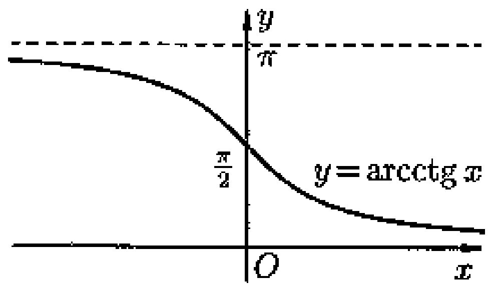
$$D(f)=[-1;1]\ E(f)=[0;\pi]$$



$$D(f)=(-\infty;+\infty)\ E(f)=(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$$



$$D(f)=(-\infty;+\infty)\ E(f)=(0;\pi)$$



<u>Определение:</u> ***Элементарными*** называются функции, образованные из основных элементарных при помощи пяти операций: сложения, вычитания, деления, умножения и суперпозиции.

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

Выберите правильный ответ.

1. ФУНКЦИЯ $y(x) = 5 \cdot 7^{3x}$ ЯВЛЯЕТСЯ

   1) логарифмической
   2) тригонометрической
   3) показательной
   4) степенной

2. ОБЛАСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИИ $y = \ln(2x - 1)$

   1) $D(f) = \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$
   2) $D(f) = \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$
   3) $D(f) = \left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$
   4) $D(f) = (-1; +\infty)$

3. ФУНКЦИЯ $y(x) = 2^x + 2^{-x}$ ЯВЛЯЕТСЯ

   1) нечетной
   2) обратной
   3) четной
   4) общего вида

4. ФУНКЦИЯ $y(x) = 5x^3 + \sin x$ ЯВЛЯЕТСЯ

   1) непрерывной
   2) обратной
   3) четной
   4) периодической

5. ФУНКЦИЯ $y = \frac{4}{x^2 - 9}$ ИМЕЕТ РАЗРЫВ ПРИ

   1) $x = 9$
   2) $x = 3$
   3) $x = -3$
   4) $x = 3$, $x = -3$

§9. Предел функции

9.1. Определение предела

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, кроме, может быть самой точки x_0.

Определение (Коши): Число A называется ***пределом функции в точке*** x_0, если для любого положительного ε найдется такое положительное число δ, что при всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

Геометрический смысл предела функции:

Для любой ε-окрестности точки A найдется такая δ-окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой δ-окрестности соответствующие значения функции $f(x)$ лежат в ε-окрестности точки A (рис. 21).

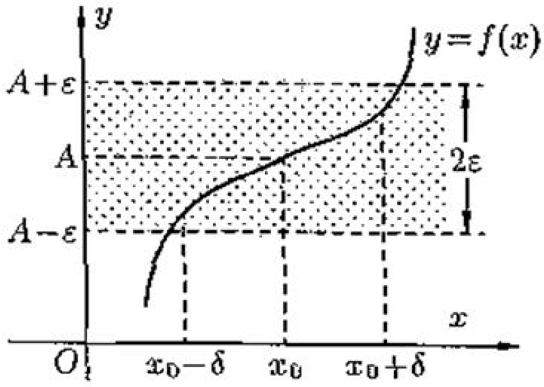


Рис. 21

9.2. Свойства пределов

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в некоторой окрестности точки x_0 и их пределы в этой точке существуют и конечны, тогда справедливы следующие свойства:

1. *Предел постоянной равен самой постоянной*: $\lim\limits_{x \to x_0} C = C$.

2. *Предел суммы (разности) функций равен сумме (разности) пределов этих функций:*

$$\lim_{x \to x_0}(f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x).$$

3. *Предел произведения функций равен произведению их пределов:*

$$\lim_{x \to x_0}(f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x).$$

Из свойств 3 и 1 следует, что постоянный множитель можно выносить за знак предела, т.е.

$$\lim_{x \to x_0}(C\ f(x)) = C \lim_{x \to x_0} f(x), \text{ где } C = \text{const}.$$

4. *Предел частного функций равен частному их пределов, если предел знаменателя отличен от нуля:*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}, \text{ если } \lim_{x \to x_0} g(x) \neq 0.$$

5. *Если предел функции существует, то он единственный.*

9.3. Непрерывность функции

Определение: Функция $f(x)$ называется ***непрерывной*** в точке x_0, если предел функции $f(x)$ в точке x_0 существует и равен значению функции в этой точке: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Функция $f(x)$ называется ***непрерывной на интервале*** (a, b), если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

Все элементарные функции непрерывны в своей области определения, поэтому для нахождения предела элементарной функции в точке x_0 достаточно вычислить значение функции в этой точке.

Пример 1: Вычислить пределы: а) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3x^2 + 7}{5 - 2x}$; б) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{\ln\left(1 + 3x^2\right)}$.

Решение: а) Так как функция $f(x) = \dfrac{3x^2 + 7}{5 - 2x}$ непрерывна в точке $x = 1$, значение предела равно значению функции в этой точке. Поэтому

$$\lim_{x \to 1} \frac{3x^2 + 7}{5 - 2x} = \frac{3 \cdot 1^2 + 7}{5 - 2 \cdot 1} = \frac{10}{3}.$$

б) Так как функция $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{\ln\left(1 + 3x^2\right)}$ непрерывна в точке $x = 2$, значение предела равно значению функции в этой точке. Поэтому

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{\ln\left(1 + 3x^2\right)} = \frac{2^2 - 4}{\ln\left(1 + 3 \cdot 2^2\right)} = \frac{0}{\ln 13} = 0.$$

9.4. Бесконечно большая и бесконечно малая функции

Рассмотрим понятия бесконечно большой и бесконечно малой функции.

Определение: Функция $y = f(x)$ называется ***бесконечно большой*** при $x \to x_0$, если

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$

Например, $y = \dfrac{1}{x - 2}$ есть бесконечно большая при $x \to 2$, а $y = 2^x$ есть бесконечно большая при $x \to \infty$.

Определение: Функция $y = f(x)$ называется ***бесконечно малой*** при $x \to x_0$, если

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0.$$

Бесконечно малые функции обозначают α, β и т.д.

Например, $y = 2^x$ есть бесконечно малая при $x \to -\infty$, т.к. $\lim\limits_{x\to-\infty} 2^x = 0$ $\left(2^{-\infty} = \dfrac{1}{2^\infty} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^\infty \to 0\right)$.

Свойства бесконечно малых функций:

1. Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых есть бесконечно малая.
2. Произведение ограниченной функции на бесконечно малую есть бесконечно малая.
3. Произведение двух бесконечно малых есть бесконечно малая.
4. Произведение бесконечно малой на число есть бесконечно малая.
5. Если функция $\alpha(x)$ есть бесконечно малая, то функция $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ – бесконечно большая и наоборот: если функция $f(x)$ – бесконечно большая, то $\dfrac{1}{f(x)}$ – бесконечно малая.

Пример 2: Вычислить пределы: а) $\lim\limits_{x\to4} \operatorname{arctg}\dfrac{x-2}{(x-4)^2}$; б) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2} - x\right)$.

Решение:

а) При $x \to 4$ знаменатель функции стремится к 0. Найдем предел, используя связь между бесконечно большой и бесконечно малой функциями (свойство 5):

$$\lim_{x\to4} \operatorname{arctg}\frac{x-2}{(x-4)^2} = \operatorname{arctg}\frac{4-2}{(4-4)^2} = \operatorname{arctg}\frac{2}{0} = \operatorname{arctg}(+\infty) = \frac{\pi}{2}$$

б) Подставим в функцию вместо переменной $-\infty$, тогда получим:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2} - x\right) = \sqrt{(-\infty)^2 + 2} - (-\infty) = \sqrt{\infty^2 + 2} + \infty = \infty + \infty = \infty$$

9.5. Раскрытие неопределенностей

При вычислении пределов используются свойства пределов и свойство непрерывности элементарных функций в области определения. Но в ряде случаев подстановка в функцию вместо независимой переменной предельного значения не может сразу привести к нахождению предела. Случаи, в которых подстановка предельного значения не дает значение предела, называют неопределенностями. Неопределенности бывают различных видов, например, $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right), \left(\dfrac{0}{0}\right), \left(1^\infty\right)$ и др.

Рассмотрим предел вида $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$, где $f(x)$ и $\varphi(x)$ – степенные функции.

Неопределенность вида $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. В этом случае в числителе и знаменателе дроби выносят за скобку наивысшую из имеющихся степеней аргумента. После сокращения дроби неопределенность устраняется.

Пример 3: Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+x^2}{x^3+3x^2-1}$.

Решение: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+x^2}{x^3+3x^2-1}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. Вынесем за скобку в числителе и знаменателе x^3. Тогда

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3+x^2}{x^3+3x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(4+\dfrac{1}{x}\right)}{x^3\left(1+\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x^3}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{4+\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x^3}}=\frac{4+0}{1+0-0}=4.$$

Неопределенность вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$**.**

Для алгебраической дроби**:** разложить числитель и знаменатель на множители, используя формулы сокращенного умножения или формулу разложения квадратного трехчлена на множители:

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b),$$

$$a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2,$$

$$a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2),$$

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2),$$

где x_1, x_2 – корни квадратного трехчлена. Неопределенность устраняется после сокращения дроби.

Пример 4: Вычислить а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2-2x}{2x^2-5x}$; б) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-9}{x^2+7x+12}$

Решение: а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2-2x}{2x^2-5x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Вынесем общий множитель за скобки и сократим дробь. Тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x^2-2x}{2x^2-5x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(3x-2)}{x(2x-5)}=\lim_{x\to 0}\frac{3x-2}{2x-5}=\frac{3\cdot 0-2}{2\cdot 0-5}=\frac{2}{5}.$$

б) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-9}{x^2+7x+12}=\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Разложим на множители числитель и знаменатель дроби: числитель – по формуле $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$, а знаменатель – по формуле $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$: $x^2+7x+12=(x+3)(x+4)$. Получим

$$\lim_{x\to -3}\frac{x^2-9}{x^2+7x+12}=\lim_{x\to -3}\frac{(x+3)(x-3)}{(x+3)(x+4)}=\lim_{x\to -3}\frac{x-3}{x+4}=\frac{-3-3}{-3+4}=-\frac{-6}{1}=-6$$

При наличии иррациональности: домножить числитель и знаменатель дроби на одно и то же выражение, приводящее к формулам сокращенного умножения. Неопределенность устраняется после сокращения дроби.

Пример 5: Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}}$

Решение: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}}=\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Дополним знаменатель до разности квадратов

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x}\right)}{\left(\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}\right)\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x}\right)}{5-x-\left(5+x\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x}\right)}{-2x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x}}{-2}=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{5}}{-2}=\frac{2\sqrt{5}}{-2}=-\sqrt{5}$$

В других случаях можно использовать замечательные пределы:

Первый замечательный предел: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

<u>Следствия:</u>

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{arctgx}{x}=1 \qquad \lim_{\alpha(x)\to 0}\frac{\sin\alpha\left(x\right)}{\alpha\left(x\right)}=1$$

Второй замечательный предел: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$.

Следствия:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e \qquad\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a \qquad\qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$$

Пример 6: Вычислить пределы: а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{\sin 2x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{5/x}$.

Решение:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{\sin 2x} = \left(\frac{0}{0}\right)$. Разделим числитель и знаменатель дроби на x и воспользуемся следствием первого замечательного предела:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{\sin 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 6x}{x}}{\frac{\sin 2x}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{6\sin 6x}{6x}}{\frac{2\sin 2x}{2x}} = \frac{6\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{6x}}{2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}} = \frac{6}{2} = 3.$$

б) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{5/x} = \left(1^\infty\right)$. Сделаем замену переменных и воспользуемся следствием второго замечательного предела:

$$\lim_{x\to 0}(1+2x)^{5/x} = \left|\begin{matrix} 2x = t \\ x = \frac{t}{2}, \\ x\to 0, t\to 0\end{matrix}\right| = \lim_{t\to 0}(1+t)^{5\cdot 2/t} = \left(\lim_{t\to 0}(1+t)^{1/t}\right)^{10} = e^{10}.$$

9.6. Односторонние пределы. Точки разрыва функции и их классификация

Определение: Число A_1 называется ***пределом функции*** $y = f(x)$ в точке x_0 слева (рис. 22), если для любой ε-окрестности точки A_1 найдется такая δ-окрестность точки x_0, что как только x попадет в δ-окрестность точки x_0, причем слева от x_0, значение функции $f(x)$ попадет в ε-окрестность точки A_1 и обозначается:

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = A_1 .$$

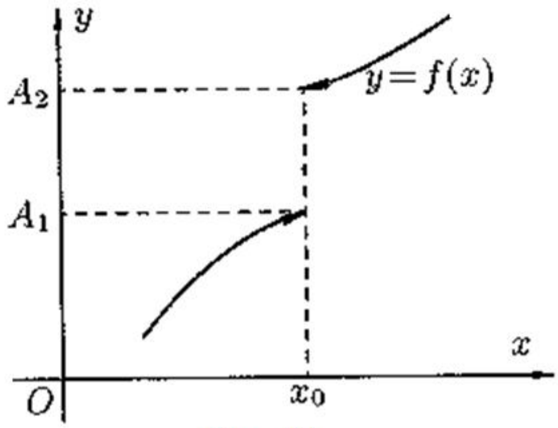


Рис. 22

Аналогично можно определить предел функции справа от x_0:

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = A_2 .$$

Очевидно, что если существует предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, то существуют оба односторонних предела, причем $A = A_1 = A_2$.

Справедливо и обратное утверждение: если существуют оба односторонних предела и они равны, то существует предел $A = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

Если же $A_1 \neq A_2$, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ не существует.

Рассмотрим классификацию точек разрыва функции.

Определение: Точки, в которых нарушается непрерывность функции, называются ***точками разрыва***.

Точки разрыва делятся на точки разрыва I рода и II рода.

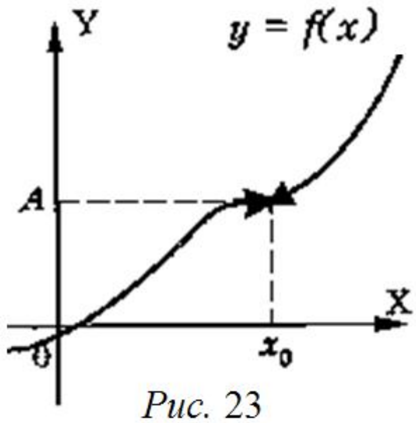


Рис. 23

Определение: Точка x_0 называется ***точкой разрыва I рода*** функции $y=f(x)$, если односторонние пределы существуют и конечны.

При этом возможны два случая.

Определение: Точка x_0 называется ***точкой устранимого разрыва*** функции $y=f(x)$, если функция в точке не определена, но односторонние пределы равны между собой (рис. 23)

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) = A .$$

Такой разрыв можно устранить, доопределив функцию в точке разрыва x_0 значением ее предела A, тогда функция запишется системой

$$y = \begin{cases} f(x), & x \neq x_0, \\ A, & x = x_0. \end{cases}$$

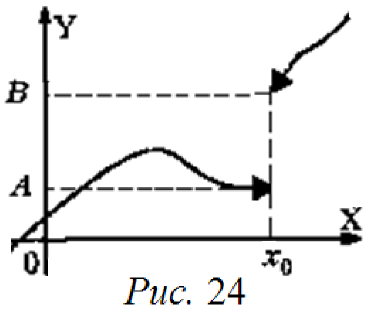


Рис. 24

Определение: Точка x_0 называется ***точкой неустранимого разрыва*** (***точкой конечного скачка*** функции) функции $y=f(x)$, если односторонние пределы не равны между собой (рис. 24)

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) \neq \lim_{x\to x_0+0} f(x).$$

Скачок функции равен абсолютной величине разности односторонний пределов.

$$\left|\lim_{x\to x_0-0} f(x) - \lim_{x\to x_0+0} f(x)\right|.$$

<u>Определение:</u> Точка x_0 называется ***точкой разрыва II рода*** функции $y=f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов не существует или равен бесконечности (рис. 25).

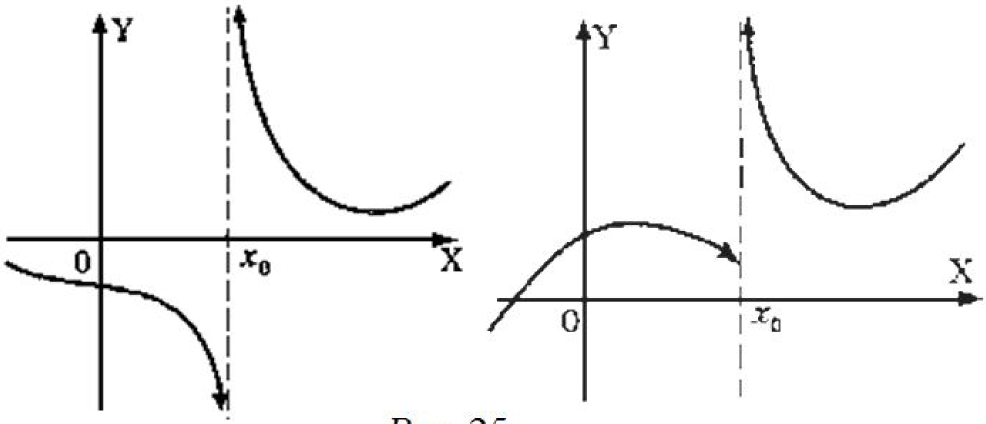


Рис. 25

Пример 7: Исследовать функцию $f(x)=\dfrac{x^2-36}{x-6}$ на непрерывность. Найти точки разрыва функции и определить их тип.

Решение: Данная функция непрерывна в своей области определения, т.к. является элементарной. В область определения не входит точка $x=6$, т.к. в этой точке знаменатель обращается в нуль. Для установления характера разрыва найдем пределы функции справа и слева от этой точки:

$$\lim_{x\to 6-0}\frac{x^2-36}{x-6}=\lim_{x\to 6-0}\frac{(x-6)(x+6)}{x-6}=\lim_{x\to 6-0}(x+6)=12.$$

$$\lim_{x\to 6+0}\frac{x^2-36}{x-6}=\lim_{x\to 6+0}\frac{(x-6)(x+6)}{x-6}=\lim_{x\to 6+0}(x+6)=12.$$

Итак, пределы справа и слева равны между собой, следовательно $x=6$ – устранимый разрыв функции. Функцию в этой точке можно доопределить, положив $y(6)=12$.

Пример 8: Исследовать функцию $f(x)=e^{\frac{x}{2-x}}$ на непрерывность. Найти точки разрыва функции и определить их тип.

Решение: Данная функция непрерывна в своей области определения, т.к. является элементарной. В область определения данной функции не входит точка $x=2$, т.к. в этой точке знаменатель обращается в нуль. Для установления характера разрыва найдем пределы функции справа и слева от этой точки.

$$\lim_{x\to 2-0} e^{\frac{x}{x-2}}=\lim_{x\to 2-0} e^{\frac{2}{2-0-2}}=\lim_{x\to 2-0} e^{\frac{2}{-0}}=\lim_{x\to 2-0} e^{-\infty}=\lim_{x\to 2-0}\frac{1}{e^{\infty}}=\frac{1}{\infty}=0.$$

$$\lim_{x\to 2+0} e^{\frac{x}{x-2}} = \lim_{x\to 2+0} e^{\frac{2}{2+0-2}} = \lim_{x\to 2+0} e^{\frac{2}{+0}} = \lim_{x\to 2+0} e^{+\infty} = \infty.$$

Итак, односторонние пределы существуют, но не равны между собой, один из пределов равен ∞, следовательно $x = 2$ – точка разрыва II рода.

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

Выберите правильный ответ.

1. ПРИ ВЫЧИСЛЕНИИ ПРЕДЕЛА $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6}$ ВОЗНИКАЕТ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ ВИДА

   1) $\dfrac{\infty}{0}$
   2) $\dfrac{0}{0}$
   3) $\dfrac{\infty}{\infty}$
   4) 1^{∞}

2. ПРИ ВЫЧИСЛЕНИИ ПРЕДЕЛА $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x-2}{4x^2+1}$ ВОЗНИКАЕТ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ ВИДА

   1) $\dfrac{\infty}{0}$
   2) $\dfrac{0}{0}$
   3) $\dfrac{\infty}{\infty}$
   4) 1^{∞}

3. ЗНАЧЕНИЕ ПРЕДЕЛА $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+8}-3}{x-1}$ РАВНО

   1) $\dfrac{10}{3}$
   2) $\dfrac{1}{6}$
   3) -4
   4) 5

4. ПЕРВЫМ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫМ ПРЕДЕЛОМ ЯВЛЯЕТСЯ

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

2) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}=e$

5. ЕСЛИ $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=A_1,\ \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=A_2,\ A_1\neq A_2$ (A_1, A_2 – ЧИСЛА), ТО x_0 – ТОЧКА

1) устранимого разрыва I рода
2) непрерывности функции
3) неустранимого разрыва I рода
4) разрыва II рода

§10. Производная функции

10.1. Задачи, приводящие к понятию производной

Понятие производной является одним из основных математических понятий. Производная широко применяется при решении целого ряда задач математики, физики, химии и других наук. К понятию производной приводят, например, задачи, связанные с изучением скорости каких-либо процессов. Рассмотрим две задачи.

1. <u>Задача о вычислении скорости движущегося тела.</u>

Пусть тело движется прямолинейно по известному закону $S=S(t)$. В момент времени t_0 тело находится на расстоянии $S(t_0)$ от начала отсчета. Через некоторое время Δt тело будет находиться на расстоянии $S(t_0+\Delta t)$. Тогда путь, пройденный телом за время Δt, составит $\Delta S(t_0)=S(t_0+\Delta t)-S(t_0)$.

Если движение было равномерным, то скорость $v=\dfrac{\Delta S(t_0)}{\Delta t}$.

Для переменного движения это отношение определяет величину средней скорости $v_{\text{ср.}}=\dfrac{\Delta S(t_0)}{\Delta t}$.

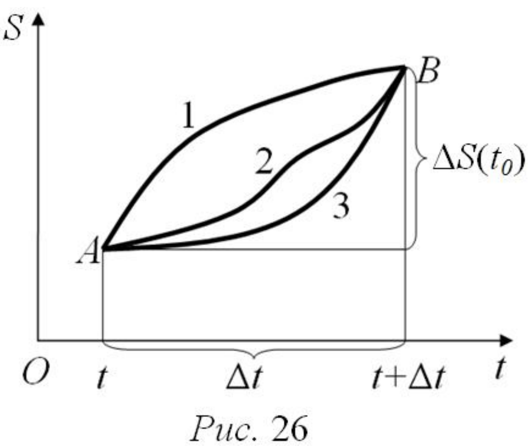


Рис. 26

Знание средней скорости не дает полной картины движения, так как различным видам движения (1, 2, 3) может соответствовать одна и та же скорость $v_{\text{ср.}}$ (рис. 26). Таким образом, средняя скорость не может отразить особенности движения тела и дать представление о скорости в момент времени t. Однако по мере уменьшения промежутка времени Δt средняя скорость будет характеризовать движение более полно.

При $\Delta t \to 0$ средняя скорость стремится к своему пределу, представляющему собой скорость движения тела в данный момент времени, или мгновенную скорость.

<u>Определение:</u> ***Мгновенная скорость*** есть предел отношения приращения пути к приращению времени, если приращение времени стремится к нулю:

$$v_{\text{мгн}}(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S(t_0)}{\Delta t}.$$

Пример 1: Определить мгновенную скорость свободно падающего тела.

Решение: В момент времени t путь $S(t_0) = \dfrac{gt_0^2}{2}$, в момент времени $t_0+\Delta t$ путь $S(t_0 + \Delta t) = \dfrac{g(t_0 + \Delta t)^2}{2}$. Тогда $\Delta S(t_0) = S(t_0 + \Delta t) - S(t_0) = gt_0\Delta t + \dfrac{g(\Delta t)^2}{2}$.

Мгновенная скорость $v_{\text{мгн}} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta S(t_0)}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0}\left(gt_0 + \dfrac{g\Delta t}{2}\right) = gt_0$.

2. <u>Задача о касательной.</u>

Прежде, чем обратиться к данной задаче, введем понятия приращения аргумента и приращения функции**.** ***Приращением аргумента*** в точке x_0 называется его изменение. Обозначается Δx. Таким образом, $\Delta x = x - x_0$ и $x = x_0 + \Delta x$. Следует заметить, что приращение аргумента может быть как положительным, так и отрицательным.

Приращением функции в точке x_0 называют изменение функции $\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Пусть дана непрерывная функция $y = f(x)$. Возьмем на графике этой функции две точки $M_0(x_0; f(x_0))$ и $M_1(x_0 + \Delta x; f(x_0 + \Delta x))$ (рис. 27). Прямая, проходящая через две точки графика, называется ***секущей.***

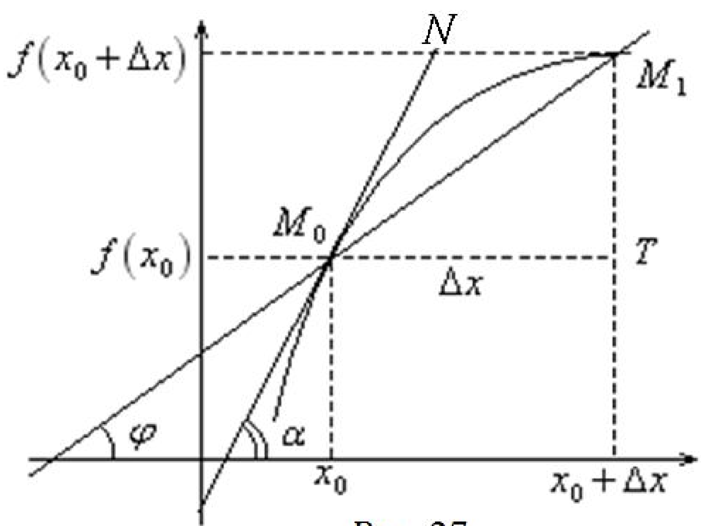


Рис. 27

Пусть точка M_1, двигаясь вдоль графика функции, неограниченно приближается к точке M_0. Тогда секущая, поворачиваясь относительно точки M_0, стремится к некоторому предельному положению M_0N.

<u>Определение:</u> ***Касательной*** к графику функции в данной точке M_0 называется предельное положение

секущей M_0M_1, проходящей через точку M_0, при неограниченном приближении точки M_1 к точке M_0.

Найдем угловой коэффициент касательной, то есть тангенс угла наклона касательной. Для этого рассмотрим треугольник M_0M_1T. Угол M_1M_0T равен углу φ (углу наклона секущей). Следовательно, $\mathrm{tg}\varphi = \frac{M_1T}{M_0T} = \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$. Касательная является предельным положением секущей, следовательно

$$\mathrm{tg}\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \mathrm{tg}\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}.$$

10.2. Определение производной, ее физический и геометрический смысл

Определение: ***Производной функции*** $y = f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при условии, что приращение аргумента стремится к нулю.

Обозначается y', $f'(x)$ или f'_x.

Таким образом, по определению

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Если в некоторой точке существует производная, то функция называется ***дифференцируемой в данной точке***. Если функция имеет производную в каждой точке интервала $(a;b)$, то функция называется ***дифференцируемой на*** этом ***интервале***. Операция нахождения производной называется ***дифференцированием***.

Пример 2: Пользуясь определением, вычислить производную функции $y=x^2$.

Решение: $f(x) = x^2$, $f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2$

По определению производная будет равна

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

Вернемся к задаче о вычислении скорости движущегося тела. Было получено, что $v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S(t_0)}{\Delta t}$. Следовательно, $v(t_0) = S'(t_0)$, то есть *скорость – это производная от пути по времени*. Обобщая, можно сказать, что если некоторая функция описывает какой-либо процесс, то производная – скорость данного процесса. ***Производная функции отражает скорость мгновенную изме-***

нения функции в данной точке. В этом состоит ***физический смысл производной***.

Вернемся к задаче о касательной. Было получено, что $\mathrm{tg}\alpha = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$, т.е. $\mathrm{tg}\alpha = f'(x_0)$. Таким образом, ***геометрический смысл производной*** состоит в том, что ***значение производной в некоторой точке численно равно тангенсу угла наклона касательной, проведенной к графику функции в этой точке***.

10.3. Основные правила дифференцирования. Таблица производных

Определение производной функции позволяет сформулировать *общее правило дифференцирования:*

1) выберем произвольное значение аргумента x и придадим ему некоторое приращение Δx, найдем соответствующие значения функции $f(x)$ и $f(x+\Delta x)$;
2) найдем соответствующее приращение функции
$$\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x);$$
3) составим отношение приращения функции к приращению аргумента $\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}$;
4) найдем предел этого отношения при $\Delta x \to 0$.

Этот предел, если он существует, будет называться производной функции.

Однако применение общего правила дифференцирования к функциям различного вида – процесс трудоемкий и сложный. Поэтому техника дифференцирования основана на ряде правил и формул дифференцирования.

Основные правила дифференцирования.

Пусть $u = u(x)$, $v = v(x)$ – дифференцируемые функции переменной x, тогда справедливо:

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$

2. $(u \cdot v)' = u'\, v + u\, v'$,

3. $(C\, u)' = C \cdot u'$, где $C = \mathrm{const}$

4. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - u\,v'}{v^2}$

5. Для сложной функции:

$$\left.\begin{aligned} y &= y(u) \\ u &= u(x) \end{aligned}\right\} \Rightarrow y = y(u(x)) \Rightarrow y'(x) = y'_u(u) \cdot u'(x)$$

Таблица 2

Производные основных элементарных функций

1. $(C)' = 0$, где $C = \text{const}$
2. $(x^n)' = nx^{n-1}$, где $n \in R$;

в частности, $(x)' = 1$, $\left(x^2\right)' = 2x$, $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$

3. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$, где $a > 0$ и $a \neq 1$
4. $(e^x)' = e^x$
5. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$, где $a > 0$ и $a \neq 1$
6. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
7. $(\sin x)' = \cos x$
8. $(\cos x)' = -\sin x$
9. $(\text{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
10. $(\text{ctg } x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
11. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
12. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
13. $(\text{arctg } x)' = \dfrac{1}{1 + x^2}$
14. $(\text{arcctg } x)' = -\dfrac{1}{1 + x^2}$

Пример 3: Найти производные следующих функций:

а) $y = 3x^2 + 4\sqrt[4]{x} - \dfrac{2}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}$;

б) $y = \cos x \cdot \text{tg } x$;

в) $y = \dfrac{3^x}{x}$;

г) $y = \sin(x^2 - 5x)$

Решение: а) $y = 3x^2 + 4\sqrt[4]{x} - \dfrac{2}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Запишем все слагаемые в виде x^n:

$$y = 3x^2 + 4\sqrt[4]{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{3}} = 3x^2 + 4x^{\frac{1}{4}} - 2x^{-\frac{1}{2}} + 3^{-\frac{1}{2}}.$$

Используем правило нахождения производной алгебраической суммы функций: $y' = \left(3x^2\right)' + \left(4x^{\frac{1}{4}}\right)' - \left(2x^{-\frac{1}{2}}\right)' + \left(3^{-\frac{1}{2}}\right)'$.

Далее вынесем постоянные множители за знак производной:

$$y' = 3\left(x^2\right)' + 4\left(x^{\frac{1}{4}}\right)' - 2\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' + \left(3^{-\frac{1}{2}}\right)'.$$

Воспользуемся таблицей производных:

$$y' = 3 \cdot 2x - 2 \cdot (-3) \cdot x^{-4} + 4 \cdot \frac{1}{4} x^{\frac{1}{4}-1} - 2 \cdot (-\frac{1}{2}) \cdot x^{-\frac{1}{2}-1} + 0 =$$

$$= 6x + 6x^{-4} + x^{-\frac{3}{4}} + x^{-\frac{3}{2}} + 0 = 6x + \frac{6}{x^4} + \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}} + \frac{1}{\sqrt{x^3}}.$$

б) $y = \cos x \cdot \operatorname{ctg} x$.

Найдем производную функции, используя правило нахождения производной произведения функций, а также таблицу производных:

$$y' = (\cos x)' \cdot \operatorname{ctg} x + \cos x \cdot (\operatorname{ctg} x)' = -\sin x \cdot \operatorname{ctg} x + \cos x \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right) =$$

$$= -\sin x \cdot \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin^2 x} = \frac{-\cos x \cdot \sin^2 x - \cos x}{\sin^2 x} = -\frac{\cos x \cdot \left(1 + \sin^2 x\right)}{\sin^2 x}.$$

в) $y = \dfrac{3^x}{x}$.

Найдем производную функции, используя правило нахождения производной частного функций, а также таблицу производных:

$$y' = \left(\frac{3^x}{x}\right)' = \frac{(3^x)' \cdot x - 3^x \cdot (x)'}{x^2} = \frac{3^x \ln 3 \cdot x - 3^x \cdot 1}{x^2} = \frac{3^x \left(x \ln 3 - 1\right)}{x^2}.$$

г) $y = \sin(x^2 - 5x)$.

Найдем производную функции, используя правило нахождения производной сложной функций, также будем пользоваться таблицей производных:

$$y(u) = \sin u, \quad u(x) = x^2 - 5x \Rightarrow \begin{cases} y'_u = (\sin u)' = \cos u, \\ u'_u = (x^2 - 5x)' = 2x - 5. \end{cases}$$

Тогда $y' = \left(\sin(x^2 - 5x)\right)' = y'_u \cdot u'_x = (2x - 5) \cdot \cos(x^2 - 5x)$.

10.4. Производные высших порядков

Производная функции $y=f(x)$ является также функцией от переменной x, следовательно, ее можно дифференцировать повторно.

Определение: Производная от производной функции называется ***производной второго порядка***:

$$\left(f'(x)\right)' = f''(x) = y''.$$

Производная второго порядка тоже является функцией от переменной x, и ее можно дифференцировать:

$$\left(y''\right)' = y'''.$$

Определение: Производная от производной $(n–1)$-ого порядка (n – натуральное число) называется ***производной n-го порядка***:

$$\left(f^{(n-1)}(x)\right)' = f^{(n)}(x).$$

Порядок производной до 3 порядка включительно обозначается количеством штрихов. Начиная с четвертого порядка порядок производной обозначается римскими цифрами или арабскими цифрами в скобках: $y^{\mathrm{IV}} = y^{(4)}$ и т.п. Производная n-го порядка обозначается $y^{(n)}$.

Пример 4: Найти $f^{IY}(x)$ функции $f(x)=x^5$.

Решение: $f'(x)=5x^4$, $f''(x)=20x^3$, $f'''(x)=60x^2$, $f^{IY}(x)=120x$.

Физический смысл производной второго порядка

Вернемся к задаче о прямолинейном движении тела. Пусть $S=S(t)$ – уравнение движения тела. Мгновенная скорость v этого движения есть производная пути S по времени t: $S'(t)=v(t)$.

Среднее ускорение переменного движения равно приращению скорости Δv к приращению времени Δt: $a_{\text{ср}} = \dfrac{\Delta v}{\Delta t}$.

Мгновенное ускорение $a_{\text{мгн}}$ в момент времени t равно пределу $a_{\text{ср}}$ при $\Delta t \to 0$:

$$a_{\text{мгн}} = v'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Так как $v(t)=S'(t)$, то $a_{\text{мгн}} = v'(t) = \left(S'_t\right)'_t = S''_{tt}$. Таким образом, вторая производная от пути по времени t равна ***мгновенному ускорению переменного движения.*** В этом состоит ***физический смысл производной второго порядка.***

Пример 5: Точка движется по закону $x=t-\sin t$. Определить мгновенные скорость и ускорение точки.

Решение:

$$v_{мгн.}=x'(t)=(t-\sin t)'=1-\cos t,\quad a_{мгн.}=v'(t)=s''(t)=(1-\cos t)'=\sin t.$$

10.5. Дифференциал функции

С понятием производной тесно связано понятие дифференциала функции.

Пусть функция $y=f(x)$ является дифференцируемой в точке x.

Определение: ***Дифференциалом функции*** $y=f(x)$ называется произведение производной функции на приращение ее аргумента.

Обозначается дифференциал: dy или $df(x)$.

Таким образом, $dy=y'\cdot\Delta x$.

Положив в этой формуле $y = x$, получим $dx=x'\cdot\Delta x$ или $dx=\Delta x$, т.е. дифференциал аргумента равен его приращению (для функции это равенство выполняться не будет). Тогда дифференциал функции может быть записан в виде

$$dy=f'(x)dx$$

Согласно данной формуле можно сформулировать правило нахождения дифференциала: чтобы найти дифференциал функции, необходимо найти производную и умножить ее на dx.

Полученная формула позволяет сформулировать следующее определение производной: производная функции равна отношению дифференциалов: $y'=\dfrac{dy}{dx}$. Эта формула используется в дифференциальных уравнениях.

Свойства дифференциала

1. $dC=0$;
2. $d(u\pm v)=du\pm dv$;
3. $d(uv)=vdu+udv$;
4. $d\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{vdu-udv}{v^2}$;
5. $y=f(u(x)),\quad dy=f'_u du=f'_u u'_x dx$

Пример 6: Найти дифференциалы функций:

а) $y=x^3+2x,\quad dy=y'dx=\left(x^3+2x\right)'dx=\left(3x^2+2\right)dx;$

б) $y=\ln\left(x^2+1\right),\quad dy=(\ln u)'\,du=\dfrac{1}{x^2+1}d\left(x^2+1\right)=\dfrac{2x\,dx}{x^2+1}.$

Установим связь между приращением функции $\Delta f(x)$ и дифференциалом $df(x)$. Для этого обратимся к определению производной:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=f'(x).$$

Следовательно,

$$\frac{\Delta f\left(x_0\right)}{\Delta x}=f'\left(x\right)+\alpha\left(x,\Delta x\right),$$

где $\alpha\left(x,\Delta x\right)$ – бесконечно малая при $\Delta x\to 0$.

Умножим обе части равенства на Δx:

$$\Delta f\left(x_0\right)=f'\left(x\right)\cdot\Delta x+\alpha\left(x,\Delta x\right)\cdot\Delta x.$$

Левая часть равенства – приращение функции. В правой части – сумма двух слагаемых, первое из которых – дифференциал функции. При $\Delta x\to 0$ все слагаемые являются бесконечно малыми, но слагаемое $\alpha\left(x,\Delta x\right)\cdot\Delta x$ является бесконечно малой более высокого порядка, т.е. быстрее стремится к нулю. Следовательно, основной вклад в сумму вносит первое слагаемое, являющееся дифференциалом функции. Отсюда можно сделать вывод: ***дифференциал функции является главной частью приращения функции.*** В этом состоит ***смысл дифференциала.***

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

Выберите правильный ответ.

1. ФУНКЦИЯ $y=f(x)$, ИМЕЮЩАЯ ПРОИЗВОДНУЮ В НЕКОТОРОЙ ТОЧКЕ, НАЗЫВАЕТСЯ

1) дифференцируемой в этой точке
2) непрерывной в этой точке
3) дифференцируемой на промежутке
4) непрерывной в своей области определения

2. ПРАВИЛЬНЫМ НАХОЖДЕНИЕМ ПРОИЗВОДНОЙ ЯВЛЯЕТСЯ

1) $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
2) $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
3) $(\operatorname{arcctg} x)'=\dfrac{1}{1-x^2}$
4) $(\operatorname{arcctg} x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$

3. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ x_0 ХАРАКТЕРИЗУЕТ

1) мгновенную скорость изменения функции в точке x_0
2) приращение аргумента в точке x_0
3) приращение функции в точке x_0
4) мгновенное ускорение в точке x_0

4. ПРАВИЛЬНЫМ НАХОЖДЕНИЕМ ПРОИЗВОДНОЙ ЯВЛЯЕТСЯ

1) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v + u\,v'}{v^2}$

2) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - u\,v'}{v^2}$

3) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{uv' - u'v}{v^2}$

4) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'}{v'}$

5. ВЫРАЖЕНИЕ, РАВНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЮ ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ НА ПРИРАЩЕНИЕ ЕЕ АРГУМЕНТА, НАЗЫВАЕТСЯ

1) производной функции;
2) дифференциалом функции
3) приращением функции
4) производной второго порядка

§11. Исследование функции с помощью производной

11.1. Достаточные условия возрастания и убывания функции

Вспомним определение возрастания и убывания функции на промежутке.

Определение: Функция $y = f(x)$ называется ***возрастающей*** на промежутке $(a;b)$, если для любых точек x_1 и x_2 из этого промежутка при $x_1 < x_2$ выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ (т.е. большему значению аргумента соответствует большее значение функции) (рис. 28).

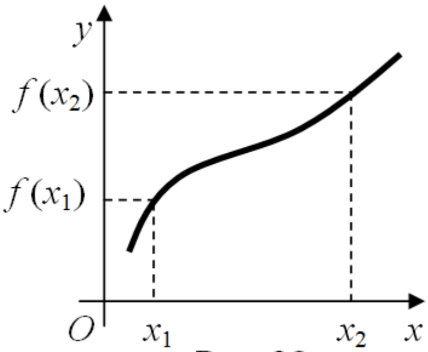


Рис. 28

Определение: Функция $y = f(x)$ называется ***убывающей*** на промежутке $(a;b)$, если для любых точек x_1 и x_2 из этого промежутка при $x_1 < x_2$ выполняется неравенство $f(x_1) > f(x_2)$ (т.е. большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции) (рис. 29).

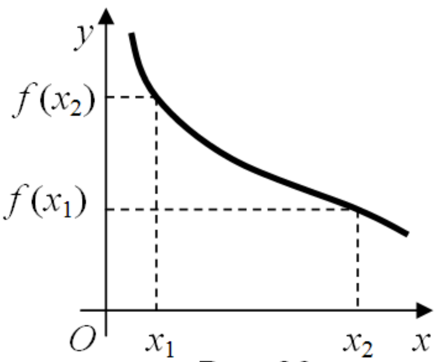


Рис. 29

Функция может являться возрастающей на всей области определения ($y = x^3$), убывающей на всей области определения ($y = e^{-x}$) или иметь как интервалы возрастания, так и интервалы убывания. Причем, существует тесная связь производной функции с наличием интервалов возрастания и убывания этой функции.

Теорема: (***достаточное условие возрастания функции***). ***Если во всех точках интервала (a;b) производная дифференцируемой функции положительна ($f'(x) > 0$), то на этом интервале функция возрастает:***

$$f'(x) > 0 \Rightarrow f(x) \nearrow .$$

Теорема: (***достаточное условие убывания функции***). ***Если во всех точках интервала (a;b) производная дифференцируемой функции отрицательна ($f'(x) < 0$), то на этом интервале функция убывает:***

$$f'(x) < 0 \Rightarrow f(x) \searrow .$$

11.2. Экстремумы функции

Определение. Точка x_0 называется ***точкой максимума*** функции $y = f(x)$, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех значений $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$.

Значение $f(x_0)$ называется ***максимумом*** функции (рис. 30).

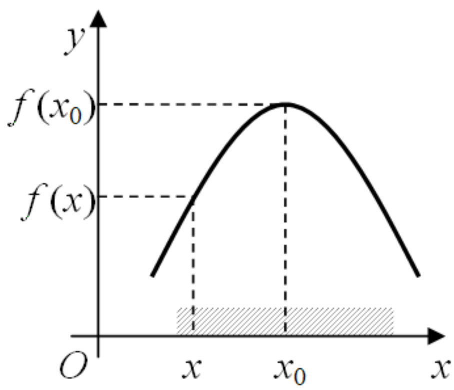


Рис. 30

Определение. Точка x_0 называется ***точкой минимума функции*** $y = f(x)$, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех значений $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$.

Значение $f(x_0)$ называется ***минимумом*** функции (рис. 31).

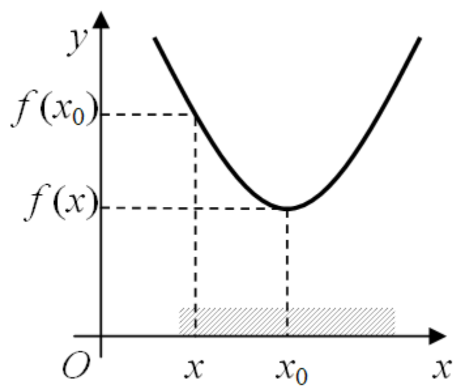


Рис. 31

Точки максимума и минимума функции называются ***точками экстремума***, а максимумы и минимумы называются ***экстремумами*** функции. Точки экстремумов отделяют промежутки возрастания от промежутков убывания непрерывной функции.

Теорема (***необходимое условие существования экстремума***). ***Если дифференцируемая функция имеет экстремум в точке x_0, то ее производная в этой точке равна нулю:*** $f'(x_0) = 0$.

Из данной теоремы следует, что дифференцируемая функция может иметь экстремумы только в тех точках, в которых производная равна нулю.

Отметим, что обратная теорема неверна: если $f'(x_0)=0$, то это не означает, что x_0 является точкой экстремума. Действительно, рассмотрим функцию $f(x)=x^3$. Ее производная $f'(x)=3x^2$ равна нулю в точке $x=0$, однако в этой точке функция экстремума не имеет (рис. 32).

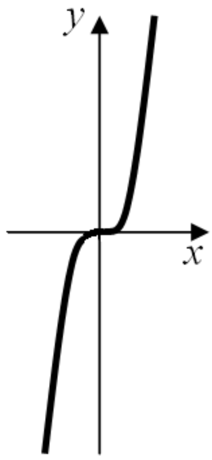


Рис. 32

Отметим, что если функция не является дифференцируемой в точке x_0 (т. е. производная в ней не существует), то в этой точке также может быть экстремум.

Таким образом, непрерывная функция $y=f(x)$ может иметь экстремум только в тех точках, где производная $f'(x)$ равна нулю или не существует. Такие точки называются *критическими точками* функции.

Теорема ***(достаточное условие экстремума). Если x_0 – критическая точка непрерывной функции $y=f(x)$ и при переходе через точку x_0 производная $f'(x)$ меняет знак, то в этой точке функция имеет экстремум. При этом, если знак производной меняется с « + » на « – », то x_0 – точка максимума, если с «– » на « + », то x_0 – точка минимума.***

Для нахождения интервалов возрастания, убывания и экстремумов дифференцируемой функции необходимо:

а) найти область определения функции;

б) вычислить производную $f'(x)$ и найти *критические* точки, т.е. решить уравнение $f'(x)=0$;

в) отметить на числовой оси *Ox* область определения функции и критические точки, в результате область определения функции $y=f(x)$ будет разбита на интервалы;

г) определить знак производной на каждом из полученных интервалов (для этого достаточно найти знак производной в любой точке интервала, т.к. внутри интервала знак производной постоянен);

д) определить интервалы возрастания и убывания функции;

е) определить точки экстремума: если знак меняется с « + » на « – », то в критической точке функция имеет максимум, если знак меняется с « – » на « + », то минимум, если знак производной не меняется – экстремума нет;

ж) найти значение функции в точках экстремума.

Пример 1: Найти интервалы монотонности и экстремумы функции $y=x^3-5x^2+8x$.

Решение: Областью определения функции является $D(y)=(-\infty;+\infty)$.

Производная функции равна $y'=\left(x^3-5x^2+8x\right)'=3x^2-10x+8$.

Приравняем производную нулю и найдем критические точки:

$$y' = 0 \Rightarrow 3x^2 - 10x + 8 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{4}{3},\ x_2 = 2.$$

Отметим точки на оси Ox и определим знаки производной на полученных интервалах (рис. 33):

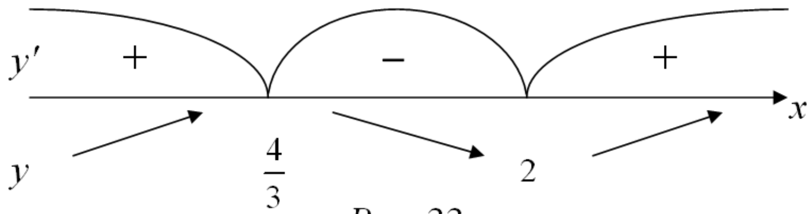


Рис. 33

На интервалах $\left(-\infty; \frac{4}{3}\right)$ и $(2; +\infty)$ производная $y' > 0$ и функция возрастает, на интервале $\left(\frac{4}{3}; 2\right)$ производная $y' < 0$ и функция убывает.

При переходе через точку $x = \frac{4}{3}$ производная меняет знак с « + » на « – », следовательно, точка $x = \frac{4}{3}$ является точкой максимума и $f_{\max}\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{112}{27} = 4\frac{4}{27}$.

При переходе через точку $x = 2$ производная меняет знак с « – » на « + », следовательно, точка $x = 2$ является точкой минимума и $f_{\min}(2) = 4$.

11.3. Выпуклость и вогнутость графика функции. Точки перегиба

<u>*Определение.*</u> График непрерывной функции $y = f(x)$ называется ***выпуклым*** на интервале (a, b), если он лежит ниже касательной, проведенной в любой точке этого интервала (рис. 34*а*).

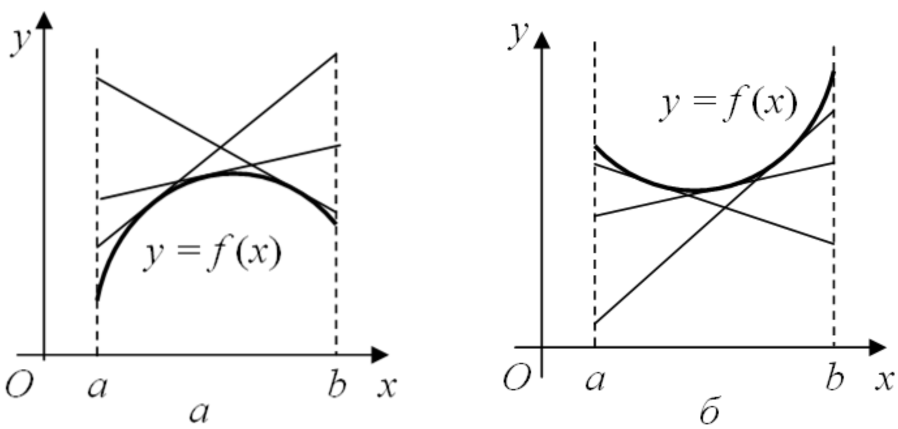


Рис. 34

<u>*Определение.*</u> График непрерывной функции $y = f(x)$ называется ***вогнутым*** на интервале (a, b), если он лежит выше касательной, проведенной в любой точке этого интервала (рис. 34*б*).

Интервалы выпуклости и вогнутости графика функции находят с помощью следующей теоремы.

<u>Теорема.</u> ***Если на некотором интервале*** $f''(x)>0$ ($f''(x)<0$ ***), то на этом интервале график функции*** $f(x)$ ***вогнутый*** **(*выпуклый*).**

$$f''(x)>0 \quad \Rightarrow \quad f(x) \quad \cup$$

$$f''(x)<0 \quad \Rightarrow \quad f(x) \quad \cap$$

<u>Определение.</u> Точка непрерывной кривой, отделяющая промежуток выпуклости от промежутка вогнутости (или наоборот), называется ***точкой перегиба.***

<u>Теорема</u> **(*достаточное условие существования точек перегиба*). *Если вторая производная*** $f''(x)$ ***в точке*** x_0 ***равна нулю или не существует и при переходе через эту точку меняет знак, то точка*** x_0 ***является точкой перегиба графика функции*** $y=f(x)$.

Для нахождения точек перегиба, интервалов выпуклости и вогнутости кривой, необходимо:

1) найти производную второго порядка;

2) найти точки, в которых вторая производная $f''(x)$ равна нулю или не существует;

3) определить знаки второй производной $f''(x)$ при переходе через эти точки: если знак $f''(x)$ меняется, то имеем точку перегиба, если знак не меняется, то точки перегиба нет;

4) на тех интервалах, где $f''(x)>0$ – кривая вогнута, где $f''(x)<0$ – выпукла.

Пример 2: Найти точки перегиба и интервалы выпуклости и вогнутости функции $y=x^3-5x^2+8x$.

Решение: Функция определена на всей числовой оси. Найдем ее вторую производную:

$$y'=\left(x^3-5x^2+8x\right)'=3x^2-10x+8,$$

$$y''=\left(3x^2-10x+8\right)'=\left(3x^2\right)'-\left(10x\right)'+8'=6x-10.$$

Вторая производная существует на всей числовой оси и обращается в нуль при $x=\dfrac{5}{3}$. Отметим точку на оси Ox и определим знаки производной на полученных интервалах (рис. 35):

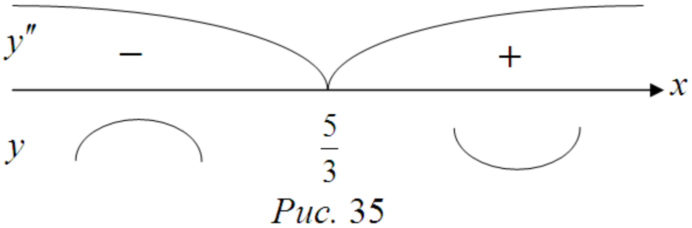


Рис. 35

На интервале $\left(-\infty; \frac{5}{3}\right)$ вторая производная $y'' < 0$ и функция выпукла, на интервале $\left(\frac{5}{3}; +\infty\right)$ производная $y'' > 0$ и функция вогнута.

При переходе через точку $x = \frac{5}{3}$ вторая производная меняет знак с « − » на« + », следовательно, точка $x = \frac{5}{3}$ является точкой перегиба.

11.4. Схема исследования функции

При исследовании функции и построении ее графика целесообразно придерживаться следующей схемы:

1) найти область определения функции;
2) исследовать функцию на симметрию, т.е. определить является ли она четной, нечетной или общего вида;
3) найти точки пересечения с осями координат;
4) исследовать функцию с помощью производной первого порядка (найти интервалы возрастания и убывания и точки экстремума функции);
5) исследовать функцию с помощью производной второго порядка (найти интервалы выпуклости и вогнутости графика, точки перегиба функции);
6) на основании проведенного исследования построить график функции.

Пример 3: Исследовать функцию $f(x) = x^3 - 3x$ и построить ее график.

Решение.

1. Функция определена при любых значениях $x \in (-\infty, +\infty)$, т.е. $D(f) = (-\infty, +\infty)$.

2. Определим, является ли функция четной или нечетной. Для этого найдем $f(-x)$:

$$f(-x) = (-x)^3 - 3(-x) = -x^3 + 3x = -\left(x^3 - 3x\right) = -f(x).$$

Поскольку $f(-x) = -f(x)$, то функция является нечетной, т.е. график этой функции симметричен относительно начала координат.

3. Найдем точки пересечения графика функции с осями координат. Для нахождения точек пересечения графика функции с осью Ox приравняем функцию к нулю и решим полученное уравнение:

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^3 - 3x = 0 \Rightarrow x\left(x^2 - 3\right) = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = \pm\sqrt{3}.$$

Таким образом, точки $(0; 0)$, $\left(-\sqrt{3}; 0\right)$ и $\left(\sqrt{3}; 0\right)$ – точки пересечения графика функции с осью Ox.

Для нахождения точки пересечения графика с осью Oy найдем значение функции при $x = 0$. Так как $f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0 = 0$, то точка (0, 0) – точка пересечения с осью Oy.

4. Исследуем функцию с помощью производной первого порядка.

Найдем производную функции:

$$f'(x) = (x^3 - 3x)' = (x^3)' - 3(x)' = 3x^2 - 3 \cdot 1 = 3x^2 - 3.$$

Производная существует во всех точках числовой оси. Для нахождения критических точек функции приравняем производную к нулю:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 3 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1.$$

Эти точки разбивают область определения функции на три интервала: $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$ и $(1; +\infty)$. Определим знаки производной в каждом интервале, выбрав на них по одной произвольной точке:

а) $f'(-2) = 3 \cdot (-2)^2 - 3 = 9 > 0 \Rightarrow$ на интервале $(-\infty; -1)$ функция возрастает;

б) $f'(0) = 3 \cdot 0^2 - 3 = -3 < 0 \Rightarrow$ на интервале $(-1; 1)$ функция убывает;

в) $f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 3 = 9 > 0 \Rightarrow$ на интервале $(1; +\infty)$ функция возрастает (рис. 36).

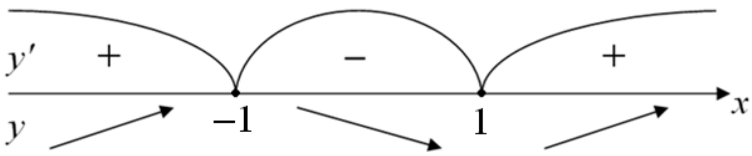


Рис. 36

Так как при переходе через критическую точку $x = -1$ производная меняет знак с «+» на «–», то точка $x = -1$ является точкой максимума, $y_{\max} = f(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) = 2$.

При переходе через точку $x = 1$ производная меняет знак с « – » на « + », следовательно, точка $x = 1$ – точка минимума, $y_{\min} = f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 = -2$.

Таким образом, функция имеет максимум в точке $(-1; 2)$ и минимум в точке $(1; -2)$.

5. Чтобы определить точки перегиба, интервалы выпуклости и вогнутости графика функции, найдем производную второго порядка:

$$f''(x) = (3x^2 - 3)' = 6x.$$

Так как $f''(x)$ определена на всей числовой оси, то перегиб графика функции возможен только в тех точках, где $f''(x) = 0$:

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 6x = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Итак, $x = 0$ – точка, в которой возможен перегиб. Отметим ее на числовой оси (рис. 37).

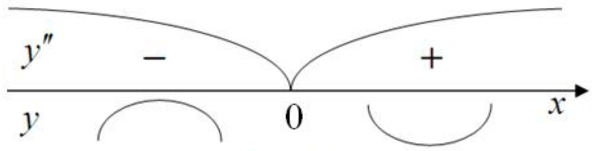


Рис. 37

Находим знаки второй производной в произвольных точках слева и справа от точки $x = 0$. Например, $f''(-1) = 6 \cdot (-1) = -6 < 0$, $f''(1) = 6 \cdot 1 = 6 > 0$. Так как знак изменился, то $x = 0$ – абсцисса точки перегиба. Ордината точки перегиба равна $f(0) = 0$. Таким образом, точка (0; 0) – точка перегиба графика функции. График функции выпуклый на интервале $(-\infty;\ 0)$ и вогнутый на интервале $(0;\ +\infty)$.

6. Сведем полученные сведения на схему (рис 38):

а) отметим на числовой оси полученные точки экстремума и перегиба;

б) наносим данные о возрастании, убывании, выпуклости и вогнутости на полученных промежутках;

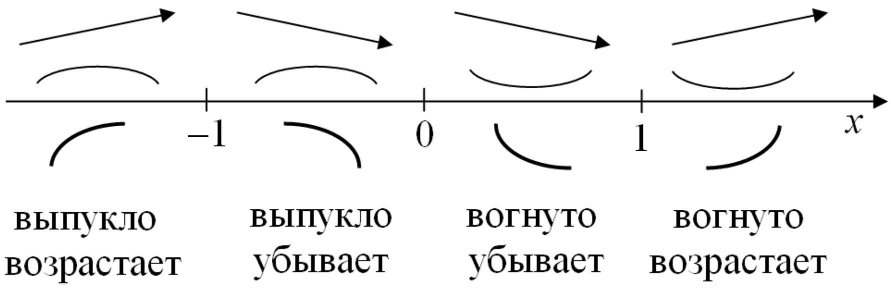


Рис. 38

в) изобразим соответствующий вид участка кривой.

7. Построим график функции (рис. 39):

а) отметим на координатной плоскости точки пересечения с осями координат $(0;0)$, $\left(-\sqrt{3};0\right)$ и $\left(\sqrt{3};0\right)$;

б) нанесем точки экстремума (–1; 2) и (1; –2);

в) «оденем» на полученные точки график функции с учетом вида кривой (см. рис. 38).

Пример 4: Исследовать функцию $f(x) = x^3 - \dfrac{x^4}{4}$ и построить ее график.

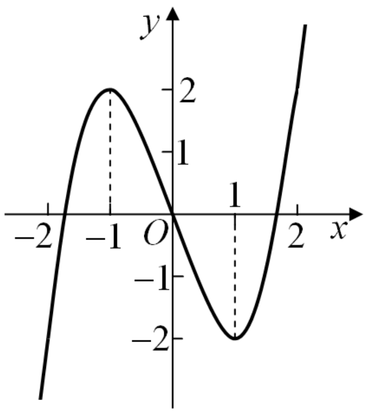


Рис. 39

Решение.

1. Найдем область определения функции: $D(f) = (-\infty;\ +\infty)$.

2. Определим, является ли функция четной или нечетной. Для этого найдем $f(-x)$:

$$f(-x) = (-x) - \frac{(-x)^4}{4} = -x^3 - \frac{x^4}{4} = -\left(x^3 + \frac{x^4}{4}\right).$$

Поскольку $f(-x) \neq f(x)$ и $f(-x) \neq -f(x)$, то функция не является ни четной, ни нечетной, т.е. это функция общего вида. Следовательно, ее график не симметричен относительно осей координат.

3. Найдем точки пересечения графика функции с осями координат.

Для нахождения точек пересечения графика функции с осью Ox приравняем функцию к нулю и решим полученное уравнение:

$$f(x)=0 \Rightarrow x^3-\frac{x^4}{4}=0 \Rightarrow x^3\left(1-\frac{x}{4}\right)=0 \Rightarrow x=0,\ x=4.$$

Таким образом, точки $(0;0),(4;0)$ – точки пересечения графика функции с осью *Ox*.

Для нахождения точки пересечения графика с осью *Oy* найдем значение функции при $x=0$. Так как $f(0)=0^3-\frac{0^4}{4}=0$, то точка (0, 0) – точка пересечения с осью *Oy*.

4. Исследуем функцию с помощью производной первого порядка.

Найдем производную функции: $f'(x)=\left(x^3-\frac{x^4}{4}\right)'=\left(x^3\right)'-\frac{1}{4}\left(x^4\right)'=3x^2-x^3.$

Производная существует на всей числовой оси. Чтобы определить критические точки, приравняем производную функции к нулю:

$$f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2-x^3=0 \Rightarrow x^2\left(3-x\right)=0 \Rightarrow x=0 \text{ и } x=3.$$

Эти точки разбивают область определения функции на три интервала: $(-\infty;0)$, $(0;3)$ и $(3;+\infty)$. Определим знаки производной в каждом интервале, выбрав на них по одной произвольной точке:

а) $f'(-1)=3\cdot(-1)^2-(-1)^3=4>0 \Rightarrow$ на интервале $(-\infty;0)$ функция возрастает;

б) $f'(1)=3\cdot 1^2-1^2=2>0 \Rightarrow$ на интервале $(0;3)$ функция возрастает;

в) $f'(4)=3\cdot 4^2-4^3=-16<0 \Rightarrow$ на интервале $(3;+\infty)$ функция убывает (рис. 40).

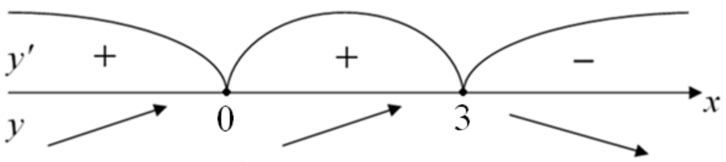


Рис. 40

Так как при переходе через критическую точку $x=0$ производная не меняет знака, то точка $x=-1$ не является точкой экстремума.

При переходе через точку $x=3$ производная меняет знак с « + » на « – », следовательно, точка $x=3$ – точка максимума,

$$y_{\max}=f(3)=3^3-\frac{3^4}{4}=27-\frac{81}{4}=\frac{108-81}{4}=\frac{27}{4}=6\frac{3}{4}.$$

Таким образом, функция имеет максимум в точке $\left(3;6\frac{3}{4}\right)$.

5. Чтобы определить точки перегиба, интервалы выпуклости и вогнутости графика функции, найдем производную второго порядка:

$$f''(x)=(3x^2-x^3)'=3(x^2)'-(x^3)'=6x-3x^2.$$

Так как $f''(x)$ определена на всей числовой оси, то перегиб графика функции возможен только в тех точках, где $f''(x)=0$:

$$f''(x)=0 \Rightarrow 6x-3x^2=0 \Rightarrow 3x(2-x)=0 \Rightarrow x=0,\ x=2.$$

Итак, $x = 0$ и $x = 2$ – точки, в которых возможен перегиб функции. Отметим их на числовой оси (рис. 41).

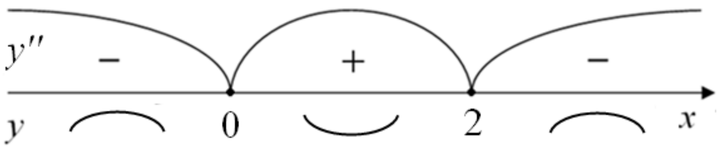


Рис. 41

Определим знаки производной в каждом интервале:

а) $f''(-1)=6\cdot(-1)-3\cdot(-1)^2=-9<0$, $\Rightarrow$ на интервале (–∞; 0) график функции выпуклый;

б) $f''(1)=6\cdot1-3\cdot1^2=3>0$, $\Rightarrow$ на интервале (0; 2) график функции вогнутый;

в) $f''(3)=6\cdot3-3\cdot3^2=-9<0$ $\Rightarrow$ на интервале (2; +∞) график функции выпуклый (рис. 41).

Найдем значение функции в точках $x = 0$ и $x = 2$:

$$f(0)=0^3-\frac{0^4}{4}=0;\ f(2)=2^3-\frac{2^4}{4}=4$$

Таким образом, точка (0; 0) и (2; 4) – точки перегиба графика функции. График функции выпуклый на интервале (–∞; 0) и (2; +∞) и вогнутый на интервале(0; 2).

6. Сведем полученные сведения на схему (рис 42):

а) отметим на числовой оси полученные точки экстремума и перегиба;

б) наносим данные о возрастании, убывании, выпуклости и вогнутости на полученных промежутках;

в) изобразим соответствующий вид участка кривой.

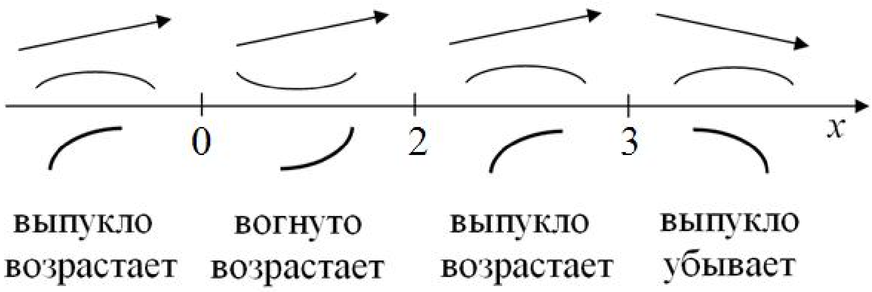


Рис. 42

7. Построим график функции (рис. 43):

а) отметим на координатной плоскости точки пересечения с осями координат $(0;0), (4;0)$;

б) нанесем точки экстремума $\left(3; 6\frac{3}{4}\right)$ и точки перегиба (0; 0) и (2; 4);

в) «оденем» на полученные точки график функции с учетом вида кривой (см. рис. 43).

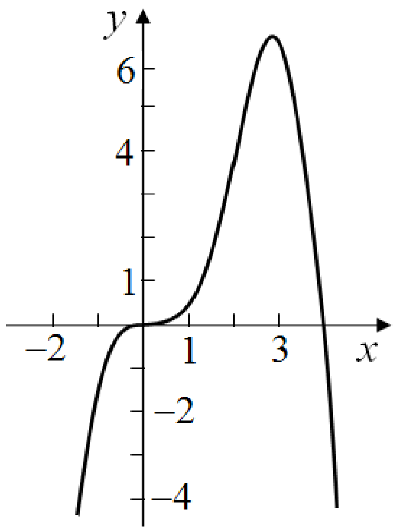


Рис. 43

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

Выберите правильный ответ.

1. ЕСЛИ СУЩЕСТВУЕТ ТАКАЯ ОКРЕСТНОСТЬ ТОЧКИ x_0, ЧТО ДЛЯ ВСЕХ ТОЧЕК x ИЗ ЭТОЙ ОКРЕСТНОСТИ ВЫПОЛНЯЕТСЯ НЕРАВЕНСТВО $f(x_0) > f(x)$, ТО ТОЧКА x_0 НАЗЫВАЕТСЯ ТОЧКОЙ
   1) максимума
   2) минимума
   3) перегиба
   4) разрыва

2. ЕСЛИ ДЛЯ ЛЮБЫХ ТОЧЕК x_1 И x_2 ИЗ ЭТОГО ПРОМЕЖУТКА $(a; b)$ ПРИ $x_1 < x_2$ ВЫПОЛНЯЕТСЯ НЕРАВЕНСТВО $f(x_1) > f(x_2)$, ТО НА ЭТОМ ПРОМЕЖУТКЕ ФУНКЦИЯ $y = f(x)$ ЯВЛЯЕТСЯ
   1) выпуклой
   2) возрастающей
   3) вогнутой
   4) убывающей

3. ТОЧКА НЕПРЕРЫВНОЙ КРИВОЙ, ОТДЕЛЯЮЩАЯ ПРОМЕЖУТОК ВЫПУКЛОСТИ ОТ ПРОМЕЖУТКА ВОГНУТОСТИ (ИЛИ НАОБОРОТ), НАЗЫВАЕТСЯ ТОЧКОЙ
   1) максимума
   2) минимума
   3) перегиба
   4) разрыва

4. ЕСЛИ ВО ВСЕХ ТОЧКАХ ИНТЕРВАЛА ($a;b$) ПРОИЗВОДНАЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОЙ ФУНКЦИИ ПОЛОЖИТЕЛЬНА ($f'(x)>0$), ТО НА ЭТОМ ИНТЕРВАЛЕ ФУНКЦИЯ
   1) выпукла
   2) возрастает
   3) вогнута
   4) убывает

5. ЕСЛИ ГРАФИК НЕПРЕРЫВНОЙ ФУНКЦИИ $y=f(x)$ ЛЕЖИТ НИЖЕ КАСАТЕЛЬНОЙ, ПРОВЕДЕННОЙ В ЛЮБОЙ ТОЧКЕ ИНТЕРВАЛА (a, b), ТО НА ЭТОМ ИНТЕРВАЛЕ ОН НАЗЫВАЕТСЯ
   1) выпуклым
   2) возрастающим
   3) вогнутым
   4) убывающим

§12. Функция нескольких переменных

12.1. Определение функции нескольких независимых переменных. Область определения функции

В предыдущих темах изучались функции одной независимой переменной. Многие процессы окружающей среды, многие величины описываются зависимостью некоторой переменной от двух и более других переменных: $c=\sqrt{a^2+b^2}$, $V=abc$ и т.п.

Обобщим понятие функции одной переменной на случай нескольких независимых переменных (на примере двух независимых переменных).

Пусть дано множество упорядоченных пар чисел (x, y).

Определение: Соответствие f называется ***функцией двух переменных*** x и y, если по некоторому правилу или закону каждой паре чисел (x, y) ставится в соответствие одно и только одно число z.

Записывается: $z=f(x,y)$, где z – ***зависимая переменная*** (***значение функции***), x и y – ***независимые переменные*** (***аргументы функции***), f – правило или закон, по которому осуществляется соответствие.

Например, $z = x^2+\ln y$; $z = y^3 e^{-xy}$.

Определение: ***Областью определения функции двух независимых переменных*** называется множество всех пар чисел (x, y), которые не противоречат смыслу алгебраического выражения. Обозначается $D(f)$.

С геометрической точки зрения, область определения – это вся плоскость XOY или некоторая часть этой плоскости.

Пример 1: Найти область определения функции $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$

Решение: В записи функции есть корень четной степени, поэтому подкоренное выражение должно быть неотрицательно, т.е. $1 - x^2 - y^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \leq 1$.

Таким образом, областью определения данной функции является круг с центром в начале координат и радиусом $R = 1$ (рис. 44).

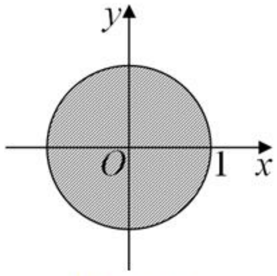


Рис. 44

12.2. Полное и частные приращения функции двух независимых переменных. Частные производные

Пусть дана функция $z = f(x, y)$. Если независимым переменным придать приращения Δx и Δy, то функция получит приращение

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y),$$

которое называется ***полным приращением функции двух независимых переменных.***

Если придать приращение только независимой переменной x, а переменную y оставить без изменения, то функция получит приращение

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y),$$

которое называется ***частным приращением функции двух независимых переменных по переменной*** x.

Если придать приращение только независимой переменной y, а переменную x оставить без изменения, то функция получит приращение

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y),$$

которое называется ***частным приращением функции двух независимых переменных по переменной*** y.

Вспомним определение производной для функции одной переменной: производная – это предел отношения приращения функции к приращению аргумента при условии, что приращение аргумента стремится к нулю:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$

Так как у функции двух независимых переменных существуют частные приращения по переменным x и y, будут также находиться частные производные по переменным x и y.

<u>Определение:</u> Предел отношения частного приращения функции по переменной x к приращению независимой переменной x при условии, что $\Delta x \to 0$ называется ***частной производной функции двух независимых переменных по переменной*** x.

Обозначается: $z'_x, f'_x, \dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial x}$

Итак, по определению: $z'_x = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta z_x}{\Delta x}$.

Аналогично можно определить частную производную по переменной y.

<u>Определение:</u> Предел отношения частного приращения функции по переменной y к приращению независимой переменной y, при условии, что $\Delta y \to 0$ называется ***частной производной функции двух независимых переменных по переменной*** y.

Обозначается: $z'_y, f'_y, \dfrac{\partial z}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Итак, по определению: $z'_y = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta z_y}{\Delta y}$.

Из определения частных производных можно вывести правило их вычисления.

<u>**Правило.**</u> При нахождении частных производных функции нескольких независимых переменных пользуются теми же правилами и таблицей производных, что и при нахождении производных функции одной переменной со следующим условием:

- если вычисляется производная по переменной x, то переменная y и функции, зависящие только от нее, считаются константами;
- если вычисляется производная по переменной y, то переменная x и функции, зависящие только от нее, считаются константами.

Пример 2: Найти частные производные функции $z = 2y + e^{x^2 - y} + 1$.

Решение: При вычислении производной по переменной x воспользуемся правилами вычисления производной суммы и сложной функции, считая, что переменная y и функции, зависящие только от нее, являются константами:

$$z'_x = (2y)'_x + \left(e^{x^2-y}\right)'_x + (1)'_x = 0 + e^{x^2-y}\left(x^2 - y\right)'_x + 0 = 2x \cdot e^{x^2-y}.$$

Аналогично, для вычисления производной по переменной y будем считать, что переменная x и функции, зависящие только от нее, являются константами:

$$z'_y = (2y)'_y + \left(e^{x^2-y}\right)'_y + (1)'_y = 2 + e^{x^2-y}\left(x^2 - y\right)'_x + 0 = 2 - e^{x^2-y}.$$

12.3. Полный дифференциал функции двух независимых переменных

Пусть $z = f(x, y)$ – функция двух независимых переменных.

<u>Определение:</u> ***Полным дифференциалом функции двух независимых переменных*** называют выражение вида $z'_x \cdot dx + z'_y \cdot dy$.

Обозначается $dz, df(x, y)$

Итак, по определению

$$dz = z'_x \cdot dx + z'_y \cdot dy,$$

где $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$ – дифференциалы независимых переменных, равные их приращениям.

Отметим, что полный дифференциал функции двух переменных имеет тот же *смысл*, что и дифференциал функции одной переменной: он является главной частью полного приращения функции и приближенно равен этому приращению, что может использоваться в моделировании и в приближенных вычислениях.

Пример 3: Записать дифференциал функции $z = x^3 \cdot \sin y$

Решение: Найдем частные производные по переменной x и по переменной y:

$$z'_x = \left(x^3\right)'_x \cdot \sin y + x^3 \cdot \left(\sin y\right)'_x = 3x^2 \cdot \sin y + x^3 \cdot 0 = 3x^2 \cdot \sin y,$$

$$z'_y = \left(x^3\right)'_y \cdot \sin y + x^3 \cdot \left(\sin y\right)'_y = 0 \cdot \sin y + x^3 \cdot \cos y = x^3 \cdot \cos y.$$

Тогда полный дифференциал имеет вид

$$dz = 3x^2 \cdot \sin y\, dx + x^3 \cdot \cos y\, dy.$$

12.4. Частные производные второго порядка функции двух независимых переменных

Частные производные z'_x и z'_y функции двух независимых переменных также являются функциями двух независимых переменных, поэтому они могут быть продифференцированы повторно по переменным x и y. Таким образом, могут быть получены следующие производные второго порядка:

- $\left(z'_x\right)'_x = z''_{xx} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ – частная производная второго порядка по переменной x;
- $\left(z'_y\right)'_y = z''_{yy} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ – частная производная второго порядка по переменной y;
- $\left(z'_x\right)'_y = z''_{xy} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ и $\left(z'_y\right)'_x = z''_{yx} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ – смешанные частные производные второго порядка. Они равны между собой.

Пример 4: Найти частные производные второго порядка функции $z = x^5 - 4x^2y^3 + y^2 - 7$.

Решение: Найдем частные производные первого порядка по переменной x и по переменной y:

$$z'_x = \left(x^5\right)'_x - \left(4x^2y^3\right)'_x + \left(y^2\right)'_x - \left(7\right)'_x = 5x^4 - 8xy^3 + 0 - 0 = 5x^4 - 8xy^3,$$

$$z'_y = \left(x^5\right)'_y - \left(4x^2y^3\right)'_y + \left(y^2\right)'_y - \left(7\right)'_y = 0 - 12x^2y^2 + 2y - 0 = 2y - 12x^2y^2.$$

Найдем частную производную второго порядка по переменной x:

$$z''_{xx} = \left(z'_x\right)'_x = \left(5x^4\right)'_x - \left(8xy^3\right)'_x = 20x^3 - 8y^3.$$

Найдем частную производную второго порядка по переменной y:

$$z''_{yy}=\left(z'_y\right)'_y=\left(2y\right)'_y-\left(12x^2y^2\right)'_y=2-24x^2y.$$

Найдем смешанные частные производные второго порядка:

$$z''_{xy}=\left(z'_x\right)'_y=\left(5x^4\right)'_y-\left(8xy^3\right)'_y=0-24xy^2=-24xy^2.$$

$$z''_{yx}=\left(z'_y\right)'_x=\left(2y\right)'_x-\left(12x^2y^2\right)'_x=0-24xy^2=-24xy^2.$$

12.5. Экстремум функции двух независимых переменных

Пусть $z=f\left(x,y\right)$ – функция двух независимых переменных. Дадим определение точек экстремума для этой функции.

<u>Определение:</u> Точка (x_0, y_0) называется ***точкой максимума*** функции двух переменных, если существует такая окрестность точки (x_0, y_0), что для всех точек (x, y) из этой окрестности, отличных от (x_0, y_0), выполняется неравенство $f\left(x_0;y_0\right)>f\left(x;y\right)$.

<u>Замечание:</u> Окрестность точки (x_0, y_0) рассматривается не на прямой, а на плоскости XOY.

Аналогично можно определить точку минимума функции двух переменных:

<u>Определение:</u> Точка (x_0, y_0) называется ***точкой минимума*** функции двух переменных, если существует такая окрестность точки (x_0, y_0), что для всех точек (x, y) из этой окрестности, отличных от (x_0, y_0), выполняется неравенство $f\left(x_0;y_0\right)<f\left(x;y\right)$.

Как и для функции одной переменной, существует необходимое и достаточное условие экстремума.

<u>**Необходимое условие экстремума:**</u> Если дифференцируемая функция $z=f\left(x,y\right)$ достигает в точке (x_0, y_0) экстремума, то ее частные производные в этой точке равны нулю: $\begin{cases}\dfrac{\partial f\left(x_0;y_0\right)}{\partial x}=0,\\ \dfrac{\partial f\left(x_0;y_0\right)}{\partial y}=0.\end{cases}$

<u>**Достаточное условие экстремума:**</u> Если функция $z=f\left(x,y\right)$ дважды дифференцируема в точке (x_0, y_0) и ее вторые частные производные непрерывны в данной точке, то для выяснения, является ли данная точка точкой экстремума, необходимо вычислить $\Delta=\begin{vmatrix} z''_{xx}\left(x_0,y_0\right) & z''_{xy}\left(x_0,y_0\right)\\ z''_{xy}\left(x_0,y_0\right) & z''_{yy}\left(x_0,y_0\right)\end{vmatrix}$.

Если $\Delta < 0$, то экстремума в точке (x_0, y_0) нет.

Если $\Delta = 0$, то нельзя ответить на вопрос об экстремуме, необходимы дополнительные исследования.

Если $\Delta > 0$, то экстремума в точке (x_0, y_0) есть, причем при $z''_{xx}(x_0, y_0) > 0$ точка (x_0, y_0) является точкой минимума; при $z''_{xx}(x_0, y_0) < 0$ – точкой максимума.

Пример 5: Исследовать на экстремум функцию $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

Решение: Найдем частные производные первого порядка:

$$z_x' = \left(x^3\right)_x' + \left(y^3\right)_x' - \left(3xy\right)_x' = 3x^2 - 3y,$$

$$z_y' = \left(x^3\right)_y' + \left(y^3\right)_y' - \left(3xy\right)_y' = 3y^2 - 3x.$$

Решим систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(x_0; y_0)}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial f(x_0; y_0)}{\partial y} = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 - 3y = 0, \\ 3y^2 - 3x = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - y = 0, \\ y^2 - x = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x^2, \\ x^4 - x = 0, \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1, \\ y = 1. \end{cases} \end{array} \right.$$

Найдем частные производные второго порядка:

$$z''_{xx} = 6x,\ z''_{yy} = 6y,\ z''_{xy} = -3.$$

Для точки $M_1(0,0)$: $z''_{xx} = 0,\ z''_{yy} = 0,\ z''_{xy} = -3 \Rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -9 < 0 \Rightarrow$ экстремума нет.

Для точки $M_2(1,1)$: $z''_{xx} = 6,\ z''_{yy} = 6,\ z''_{xy} = -3 \Rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 27 > 0,\ z''_{xx} > 0 \Rightarrow$ точка минимума.

Ответ: $M_2(1,1)$ – точка минимума.

12.6. Метод наименьших квадратов

Одним из примеров применения исследования функции нескольких переменных на экстремум является метод наименьших квадратов. Этот метод дает возможность описать зависимость между характеристиками изучаемых объектов, позволяющую по значению одной величины прогнозировать значение другой.

Пусть исследуются две величины (например, оценка на экзамене и число дней подготовки к нему, рост и вес и т.п.). Произведено n опытов. Данные представлены в таблице:

x_i	x_1	x_2	x_3	…	x_n
y_i	y_1	y_2	y_3	…	y_n

Чтобы оценить вид зависимости, отложим в прямоугольной декартовой системе координат полученные точки (рис. 45):

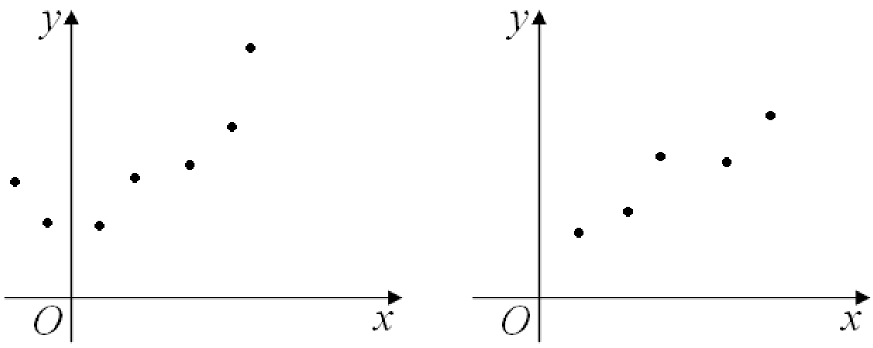


Рис. 45

По характеру расположения точек можно сделать предположение о виде зависимости: линейная, квадратичная, экспоненциальная и т.д.

Пусть $y = f\left(x, a, b, c, ...\right)$ – функция, описывающая зависимость y от x с неизвестными параметрами a, b, c, …Чтобы найти эту функцию и описать зависимость, нужно:

1) определить или предположить вид этой функции с точностью до параметров (например, линейная зависимость имеет вид $y = ax + b$, квадратичная – $y = ax^2 + bx + c$);

2) найти значение параметров a, b, c, … Причем, эти параметры должны быть определены таким образом, чтобы разброс экспериментальных точек относительно полученной кривой был наименьшим.

Применим для нахождения параметров a, b, c, … метод наименьших квадратов, предложенный Гауссом. В этом методе для описания разброса экспериментальных точек M_1, M_2, …, M_n относительно некоторой теоретической кривой вводится в рассмотрение функция $U\left(a, b, c, ...\right)$, равная сумме квадратов разностей между теоретическим значением в точке x_i и экспериментальным:

$$U\left(a, b, c, ...\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(f\left(x_i, a, b, c, ...\right) - y_i\right)^2$$

Неизвестные параметры a, b, c, … находятся из условия, что значение функции $U\left(a, b, c, ...\right)$ должно быть минимальным. То есть, из условия, что функция достигает минимального значения. Следовательно, частные производные от этой функции по переменным a, b, c, … должны быть равны 0:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U\left(a, b, c, ...\right)}{\partial a} = 0, \\ \dfrac{\partial U\left(a, b, c, ...\right)}{\partial b} = 0, \\ \qquad ... \end{cases}$$

Мы получили систему, число уравнений в которой равно числу неизвестных парамет-

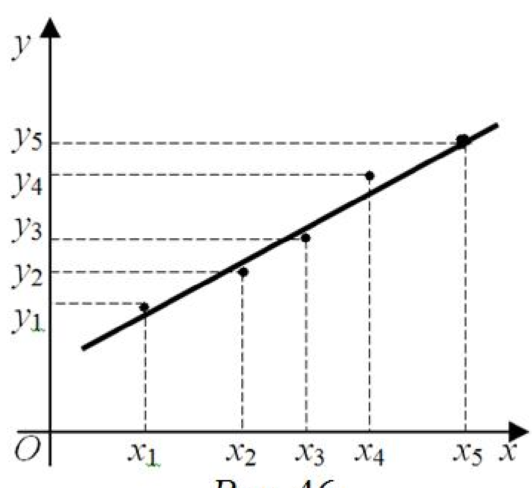


Рис. 46

ров. Решив эту систему, мы найдем значения этих параметров и сможем записать функцию $y = f(x, a, b, c, ...)$.

Рассмотрим частный случай, когда ***исследуемые величины связаны линейной зависимостью*** $y = ax + b$. При этом экспериментальные точки будут располагаться вдоль некоторой прямой (рис. 46).

Тогда: $f(x_i, a, b) = ax_i + b$,

$$U(a,b) = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2 .$$

Вычислим частные производные от этой функции:

$$\frac{\partial U(a,b)}{\partial a} = \left[\sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2 \right]_a' = \sum_{i=1}^{n} 2(ax_i + b - y_i) \cdot x_i = \\ = 2\left(\sum_{i=1}^{n} ax_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} y_i x_i \right),$$

$$\frac{\partial U(a,b)}{\partial b} = \left[\sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2 \right]_b' = 2\sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i) = 2\left(\sum_{i=1}^{n} ax_i + nb - \sum_{i=1}^{n} y_i \right).$$

По необходимому условию экстремума эти частные производные должны быть равны 0:

$$\begin{cases} 2\left(a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right) = 0, \\ 2\left(a\sum_{i=1}^{n} x_i + bn - \sum_{i=1}^{n} y_i \right) = 0. \end{cases}$$

Разделим обе части на 2 и получим систему:

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum_{i=1}^{n} y_i. \end{cases}$$

Эту систему можно решить методом Крамера. Вычислим определители:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & n \end{vmatrix} = n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2,$$

$$\Delta_a = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} y_i & n \end{vmatrix} = n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i ,$$

$$\Delta_b = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} y_i \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \sum_{i=1}^{n} x_i ,$$

$$a = \frac{\Delta_a}{\Delta} = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}, \quad b = \frac{\Delta_b}{\Delta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \sum_{i=1}^{n} x_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}.$$

Уравнение $y = ax + b$, в котором a и b находятся по данным формулам, является уравнением прямой, относительно которой разброс точек будет минимальным.

Замечание: Для нахождения a и b использовалось только необходимое условие экстремума. Можно показать с помощью достаточного условия, что найденная точка действительно будет являться точкой минимума.

Пример 6: У шести подростков оценивались баллы по тесту Векслера (переменная x) и оценки контрольной по алгебре (переменная y). Результаты приведены в таблице:

x_i	8	10	12	14	16	18
y_i	2	3	4	3	5	4

Оценить приближенно данную зависимость с помощью метода наименьших квадратов.

Решение:

1. Отложим полученные точки в декартовой системе координат (рис. 47).
2. По расположению точек на графике можно предположить, что зависимость является линейной: $y = ax + b$.
3. Найдем a и b. Для этого построим расчетную таблицу:

№	x_i	y_i	x_i^2	$x_i\, y_i$
1	8	2	64	16
2	10	3	100	30
3	12	4	144	48
4	14	3	196	42
5	16	5	256	80
6	18	4	324	72
Сумма	**78**	**21**	**1084**	**288**

4. Подставим полученные суммы в формулы для a и b:

$$a = \frac{6\cdot 288 - 78\cdot 21}{6\cdot 1084 - 78^2} = \frac{90}{420} \approx 0,21; \quad b = \frac{1084\cdot 21 - 288\cdot 78}{6\cdot 1084 - 78^2} = \frac{300}{420} \approx 0,71.$$

Следовательно, искомая зависимость $y = 0,21x + 0,71$.

5. Построим данную прямую (рис. 47). Для этого найдем точки, принадлежащие этой прямой:

пусть $x = 8$, тогда $y = 2{,}39$;

пусть $x = 18$, тогда $y = 4{,}49$.

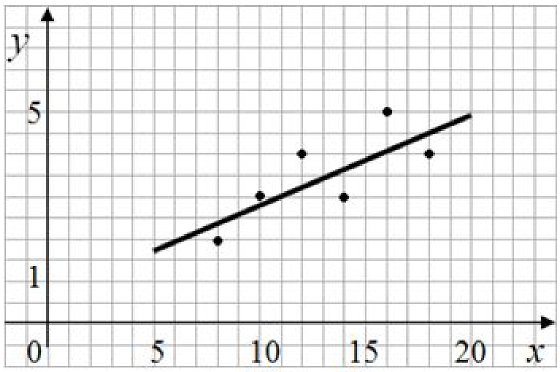


Рис. 47

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

Выберите правильный ответ.

ДАНА ФУНКЦИЯ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ $z = x^2 + y^2 + xy - 4x - 5y$.

1. ЧАСТНАЯ ПРОИЗВОДНАЯ ПО ПЕРЕМЕННОЙ x РАВНА

1) $2x + 2y + xy - 9$
2) $2x + y^2 - 4 - 4y$
3) $2x + y - 4$
4) $2x + xy - 4 - 5y$

2. ПОЛНЫЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ РАВЕН

1) $dz = \left(2x + 2y + xy - 9\right)dx + \left(2x + 2y + xy - 9\right)dy$
2) $dz = \left(2x + y^2 - 4y - 4\right)dx + \left(x^2 + 2y - 3x - 5\right)dy$
3) $dz = \left(2x + y - 4\right)dx + \left(2y + x - 5\right)dy$
4) $dz = \left(2x + xy - 4 - 5y\right)dx + \left(2y + xy - 4x - 5\right)dy$.

3. ЧАСТНАЯ ПРОИЗВОДНАЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА ПО ПЕРЕМЕННОЙ y РАВНА

1) 2
2) x^2+2-3x
3) $4+xy$
4) $2+xy$

4. СМЕШАННАЯ ПРОИЗВОДНАЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА РАВНА

1) $4+xy$
2) 1
3) $2x+2y-4$
4) $3x-5$

5. В ТОЧКЕ $M(1;\ 2)$ $z'_x=0,\ z'_y=0,\ \Delta>0,\ \ z''_{xx}>0$. ФУНКЦИЯ В ЭТОЙ ТОЧКЕ

1) не имеет экстремума
2) имеет максимум
3) необходимы дополнительные исследования
4) имеет минимум

§13. Неопределенный интеграл

13.1. Понятие неопределенного интеграла

При изучении темы «Дифференциальное исчисление» по заданным функциям вычислялись их производные. Но при решении ряда задач часто возникает обратная задача – по известной производной восстановить функцию, от которой была вычислена эта производная (например, по известной мгновенной скорости узнать, как изменяется координата точки в зависимости от времени). Такая задача приводит к понятию первообразной.

<u>Определение:</u> Функция *F(x)* называется ***первообразной функции*** *f(x)* ***на интервале*** *(a;b)*, если для любого x из этого интервала выполняется равенство:

$$F'(x)=f(x).$$

Например: первообразной функции $y=x^2$ является функция $F(x)=\frac{x^3}{3}$.

<u>*Теорема:*</u> ***Если функция*** $F(x)$ ***является первообразной функции*** $f(x)$ ***на (a; b), то множество всех первообразных для f(x) задается формулой*** $F(x)+C$***, где C – произвольное число***.

Доказательство:

$$(\Phi(x)-F(x))'=\Phi'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0\Rightarrow\Phi(x)=F(x)+C.$$

<u>Определение:</u> ***Неопределенным интегралом*** от функции *f(x)* будет называться совокупность всех первообразных $F(x)+C$. Обозначается:

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где $\int$ – знак неопределенного интеграла; $f(x)$ – подынтегральная функция; $f(x)dx$ – подынтегральное выражение.

Определение: Операция нахождения неопределенного интеграла от функции называется ***интегрированием функции.***

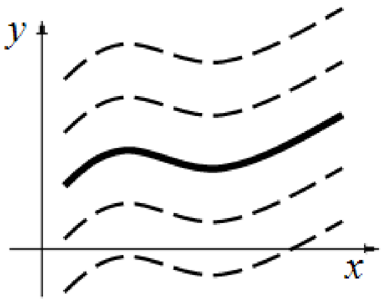


Рис. 48

Определение: Функция, для которой может быть вычислена первообразная (неопределенный интеграл), называется ***интегрируемой***.

Геометрически неопределенный интеграл представляет собой семейство «параллельных» кривых $y = F(x) + C$ (рис. 48). График каждой первообразной называется ***интегральной кривой.***

13.2. Свойства неопределенного интеграла

1. Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

2. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx.$$

3. Неопределенный интеграл от некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной C:

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

4. Неопределенный интеграл от суммы (разности) двух функций равен сумме (разности) неопределенных интегралов от этих функций:

$$\int \left(f(x) \pm g(x)\right)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

5. Постоянный множитель может быть вынесен за знак неопределенного интеграла:

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx.$$

13.3. Таблица основных неопределенных интегралов

Пользуясь тем, что интегрирование – операция, обратная дифференцированию, можно получить таблицу основных интегралов путем обращения соответствующих формул таблицы производных:

Таблица 3

Основные неопределенные интегралы

1. $\int dx = x + C$;
2. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$;
3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$;
4. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$;
5. $\int e^x dx = e^x + C$;
6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$;
7. $\int \cos x dx = \sin x + C$;
8. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$;
9. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$;
10. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C$;
11. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C$;
12. $\int \dfrac{dx}{a^2+x^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg} \dfrac{x}{a} + C$;
13. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C$;
14. $\int \dfrac{dx}{x^2-a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C$;
15. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C$.

Интегралы, приведенные в таблице, называются *табличными*.

В интегральном исчислении нет простых и универсальных правил отыскания первообразных, как в дифференциальном исчислении. Методы нахождения первообразных (т.е. методы интегрирования) в большинстве случаев сводятся к приведению интеграла к табличному. Поэтому табличные интегралы нужно знать и уметь их узнавать.

13.4. Основные методы интегрирования

1. *Метод непосредственного интегрирования*

Определение: Метод интегрирования, при котором данный интеграл путем тождественных преобразований подынтегральной функции и применения свойств неопределенного интеграла приводится к одному или нескольким табличным интегралам, называется ***непосредственным интегрированием.***

При использовании данного метода последовательно выполняют следующее:

- преобразуют подынтегральное выражение;
- используют свойства неопределенного интеграла;
- применяют таблицу интегралов.

Пример 1: Найти интегралы а) $\int (1-x)(2+3x)dx$; б) $\int \dfrac{\sqrt[3]{x}-x}{x^5}dx$.

Решение:

а) Перемножим выражения, стоящие в скобках, и воспользуемся свойствами неопределенного интеграла (4 и 5) и таблицей интегралов:

$$\int(1-x)(2+3x)dx=\int\left(2+3x-2x-6x^2\right)dx=\int\left(2+x-6x^2\right)dx=$$
$$=2\int dx+\int x\,dx-6\int x^2\,dx=2x+\frac{x^2}{2}-6\frac{x^3}{3}+C=2x+\frac{x^2}{2}-2x^3+C.$$

б) Разделим почленно числитель дроби на знаменатель и воспользуемся свойством неопределенного интеграла (4) и таблицей интегралов:

$$\int\frac{\sqrt[3]{x}-x}{x^2}dx=\int\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{x^2}-\frac{x}{x^2}\right)dx=\int\left(\frac{1}{x^{5/3}}-\frac{1}{x}\right)dx=\int x^{-5/3}dx-\int\frac{dx}{x}=\frac{x^{-2/3}}{-2/3}-\ln|x|+C=$$
$$=-\frac{3}{2\sqrt[3]{x^2}}-\ln|x|+C.$$

2. ***Метод интегрирования подстановкой (заменой переменной)***

Данный метод состоит во введении новой переменной интегрирования. При этом если переменная выбрана правильно, заданный интеграл сводится к табличному. Общих методов подбора подстановок не существует. Умение правильно определить подстановку определяется практикой.

Пусть требуется вычислить интеграл:

$$\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)dx=\left|\begin{matrix}t=\varphi(x)\\ dt=\varphi'(x)dx\end{matrix}\right|=\int f(t)\,dt=F(t)+C=F(\varphi(x))+C$$

Частные случаи:

1) $\int f(ax+b)\,dx=|t=ax+b|$.

2) $\int f\left(ax^n+b\right)x^{n-1}dx=\left|t=ax^n+b\right|$

Пример 2: Найти интегралы а) $\int x^3e^{1-x^4}dx$; б) $\int\frac{\sqrt{2\ln x+5}}{x}dx$.

Решение:

а) $\int x^3e^{1-x^4}dx$. Обратим внимание, что $\left(1-x^4\right)'=-4x^3$, тогда за новую переменную возьмем $t=1-x^4$:

$$\int x^3e^{1-x^4}dx=\left|t=1-x^4,\,dt=-4x^3\Rightarrow x^3dx=-\frac{dt}{4}\right|=\int e^t\cdot\left(-\frac{dt}{4}\right)=-\frac{1}{4}\int e^tdt=$$
$$=-\frac{1}{4}e^t+C=-\frac{1}{4}e^{1-x^4}+C.$$

б) $\int\frac{\sqrt{\ln x+5}}{x}dx$. Нетрудно заметить, что $\frac{1}{x}=(\ln x+5)'$. Сделав замену $t=\ln x+5$, получим:

$$\int\frac{\sqrt{\ln x+5}}{x}dx=\left|t=\ln x+5\,,\,dt=\frac{dx}{x}\right|=\int\sqrt{t}\,dt=\int t^{\frac{1}{2}}\,dt=\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{3}\sqrt{t^3}+C=$$

$$=\frac{2}{3}\sqrt{\left(\ln x+5\right)^3}+C.$$

3. *Интегрирование по частям*

Пусть $u=u(x)$ и $v=v(x)$ – дифференцируемые функции переменной x. Тогда $d(uv)=u\cdot dv+v\cdot du$. Интегрируя это равенство, получим

$$\int d(uv)=\int u\,dv+\int v\,du \quad \text{или} \quad \int u\,dv=uv-\int v\,du.$$

Эта формулу называется ***формулой интегрирования по частям***.

Суть этого метода состоит в следующем: подынтегральное выражение представляется в виде произведения двух сомножителей: *u* и *dv*. При этом основным критерием разбиения служит то, что интеграл $\int v\,du$ должен быть проще или, по крайней мере, не сложнее исходного интеграла, а функция *v* по ее дифференциалу *dv* определялась достаточно легко. Укажем некоторые виды интегралов, которые удобно вычислять методом интегрирования по частям:

1. Интегралы вида $\int P_n(x)\sin\alpha x\,dx$, $\int P_n(x)\cos\alpha x\,dx$, $\int P_n(x)e^{\alpha x}\,dx$, $\int P_n(x)\,a^{\alpha x}\,dx$, где $P_n(x)$ – многочлен, α – число. В качестве *u* берется многочлен $P_n(x)$, а в качестве *dv* – все остальные сомножители, включающие тригонометрическую или показательную функции.
2. Интегралы вида $\int P_n(x)\ln\alpha x\,dx$, $\int P_n(x)\arcsin\alpha x\,dx$, $\int P_n(x)\arccos\alpha x\,dx$, $\int P_n(x)\operatorname{arc\,tg}\alpha x\,dx$, $\int P_n(x)\operatorname{arc\,ctg}\alpha x\,dx$. В качестве *u* берутся логарифмическая или обратные тригонометрические функции, а в качестве $dv=P_n(x)\,dx$.

Пример 3: Найти интегралы: а) $\int(2x-1)e^x dx$; б) $\int x\ln x\,dx$;

Решение: а) $\int(2x-1)e^x dx$. Обозначим: $u=2x-1,\ dv=e^x dx$.

Для применения формулы интегрирования по частям необходимо знать еще *du* и *v*: $du=2\,dx,\ v=\int e^x dx=e^x$. Тогда

$$\int(2x-1)e^x dx=(2x-1)\cdot e^{3x}-\int e^{3x}\cdot 2\,dx=(2x-1)e^x-2\int e^x\,dx=$$
$$=(2x-1)e^x-2e^x+C=(2x-1)e^x-2e^x+C.$$

$$\text{б) }\int x\ln x\,dx=\left|\begin{array}{l} u=\ln x\Rightarrow du=\dfrac{dx}{x} \\ dv=x\,dx\Rightarrow\int x\,dx=\dfrac{x^2}{2}\end{array}\right|=\frac{x^2}{2}\ln x-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{dx}{x}=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{2}\int x\,dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}+C=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+C.$$

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

Выберите один или несколько правильных ответов.

1. СОВОКУПНОСТЬ ВСЕХ ПЕРВООБРАЗНЫХ ДЛЯ ФУНКЦИИ $f\ (x)$ НАЗЫВАЕТСЯ

1) определенным интегралом
2) неопределенным интегралом
3) производной функции
4) первообразной функции

2. ПРАВИЛЬНЫМ ПРИМЕНЕНИЕМ СВОЙСТВ НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА ЯВЛЯЕТСЯ

1) $\int f(x)\cdot g(x)\,dx = \int f(x)\,dx \cdot \int g(x)\,dx$

2) $\int \frac{f(x)}{g(x)}\,dx = \frac{\int f(x)\,dx}{\int g(x)\,dx}$

3) $\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

4) $\int f^n(x)\,dx = \left(\int f(x)\,dx\right)^n$

3. ПРАВИЛЬНЫМ НАХОЖДЕНИЕМ ТАБЛИЧНОГО ИНТЕГРАЛА ЯВЛЯЕТСЯ

1) $\int dx = C$

2) $\int dx = x + C$

3) $\int a^x dx = \frac{a^{x+1}}{x+1} + C$

4) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln x} + C$

4. ПРАВИЛЬНЫМ НАХОЖДЕНИЕМ ТАБЛИЧНОГО ИНТЕГРАЛА ЯВЛЯЕТСЯ

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arccos x + C$

2) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arctg}\ x + C$

3) $\int \frac{dx}{1-x^2} = \mathrm{arc\,c\,tg}\ x + C$

4) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \arccos x + C$

5. ПРИ ВЫЧИСЛЕНИИ ИНТЕГРАЛА $\int\left(2x^3 + \cos x\right)dx$ НЕОБХОДИМО ИСПОЛЬЗОВАТЬ СВОЙСТВА

1) производная от неопределенного интеграла
2) интеграл от суммы двух функций
3) вынесение множителя из-под знака интеграла
4) интеграл от разности двух функций

§14. Определенный интеграл

14.1. Задача о вычислении площади криволинейной трапеции

Пусть на отрезке $\left[a,b\right]$ задана функция $y = f(x)$, причем $f(x) \geq 0$ в любой точке x промежутка $\left[a,\, b\right]$.

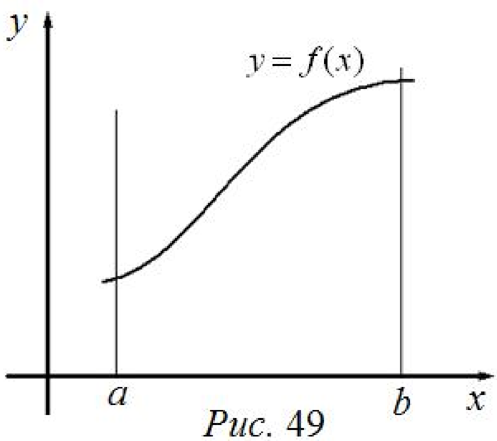


Рис. 49

<u>*Определение:*</u> ***Криволинейной трапецией*** называется фигура, ограниченная сверху графиком функции, снизу – осью *Ox*, слева и справа прямыми $x = a$ и $x = b$ (рис. 49).

Найдем площадь этой фигуры. Для этого:

1) Разобьем отрезок $\left[a,b\right]$ на *n* частичных отрезков точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Длину *i*-го частичного отрезка обозначим Δx_i.

2) В каждой точке x_i восстановим перпендикуляры до графика функции, как показано на рисунке 50. В результате трапеция разобьется на *n* криволинейных трапеций. Значит, ее площадь может быть найдена как сумма площадей этих трапеций:

$$S = S_1 + S_2 + \ldots + S_n = \sum_{i=1}^{n} S_i$$

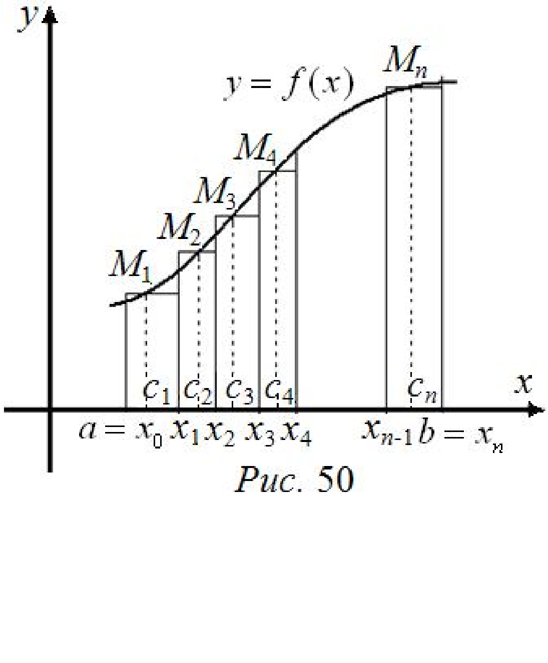


Рис. 50

3) Выберем в каждом частичном отрезке произвольную точку c_i и восстановим перпендикуляры до пересечения с графиком функции. Получим точки M_1, M_2, ... M_n (рис. 50). Высота каждого перпендикуляра будет равна $f(c_i)$.

4) Через полученные точки M_1, M_2, ... M_n проведем отрезки параллельно оси OX. Получим прямоугольники с основаниями, равными длине i-х частичных отрезков, и высотами $f(c_i)$. Причем, площадь каждого прямоугольника будет приближенно равна площади части криволинейной трапеции: $S_i \approx f(c_i) \cdot \Delta x_i$. Следовательно, $S \approx \sum_{i=1}^{n} f\left(c_i\right) \cdot \Delta x_i$, причем это приближение будет тем точнее, чем меньше Δx_i.

5) Обозначим за λ максимальный из отрезков Δx_i. Понятно, что если $\lambda \to 0$, то и все $\Delta x_i \to 0$. Следовательно, $S = \lim\limits_{\substack{\lambda \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f\left(c_i\right) \cdot \Delta x_i$.

14.2. Понятие определенного интеграла

Пусть функция $y = f(x)$ определена, ограничена и непрерывна на конечном промежутке $[a, b]$. Разобьем $[a, b]$ точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ на частичные отрезки длиной Δx_i. Обозначим за λ максимальный из отрезков Δx_i. В каждом из отрезков выберем произвольную точку c_i и построим сумму $\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f\left(c_i\right) \cdot \Delta x_i$, которая называется ***интегральной суммой***.

Рассмотрим $\lim\limits_{\substack{\lambda \to 0 \\ n \to \infty}} \sigma_n = \lim\limits_{\substack{\lambda \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f\left(c_i\right) \cdot \Delta x_i$.

Если этот предел существует, конечен, не зависит от способа разбиения на частичные отрезки и от выбора точек c_i, то его называют ***определенным интегралом*** от функции $y = f(x)$ на промежутке $[a,b]$. Обозначают:

$$\int_a^b f\left(x\right) dx,$$

где $f\left(x\right)$ – подынтегральная функция, $f\left(x\right)dx$ – подынтегральное выражение, a и b – нижний и верхний пределы интегрирования.

14.3. Свойства определенного интеграла

1. Если функция непрерывна, то она интегрируема.
2. Если функция имеет конечное число конечных разрывов, то она интегрируема.
3. Если k – постоянное число и функция $f\left(x\right)$ интегрируема на $[a, b]$, то

$$\int_a^b k\cdot f(x)dx = k\cdot\int_a^b f(x)dx.$$

4. Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ интегрируемы на $[a,\ b]$, то интегрируема их сумма и разность, причем

$$\int_a^b \left(f_1(x)\pm f_2(x)\right)dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx.$$

5. Если пределы интегрирования поменять местами, то определенный интеграл поменяет свой знак:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

6. Определенный интеграл не зависит от переменной интегрирования:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt.$$

7. Определенный интеграл с равными пределами интегрирования равен нулю:

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

8. Если $f(x)$ интегрируема на $[a,\ b]$ и точка $c\in[a;b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

14.4. Вычисление определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница

Выше было рассмотрено понятие определенного интеграла, его свойства, но не был предложен способ его вычисления.

<u>*Теорема Ньютона-Лейбница:*</u> ***Если функция*** $y = f(x)$ ***непрерывна на*** $[a;b]$ ***и*** $F(x)$ ***– какая-либо ее первообразная, то имеет место равенство:***

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Данная формула называется ***формулой Ньютона-Лейбница.***

Отметим, что разность $F(b)-F(a)$ может быть записана в виде $F(x)\Big|_a^b$,

где символ $\Big|_a^b$ называется знаком двойной подстановки. С учетом этого формула Ньютона-Лейбница может быть записана в виде:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Данная формула является основной формулой интегрального исчисления. Она устанавливает связь между определенным и неопределенным интегралом и дает удобный способ вычисления определенного интеграла.

14.5. Методы вычисления определенных интегралов

1. ***Метод непосредственного интегрирования***

В данном методе используется следующее:

- Преобразование подынтегрального выражения.
- Свойства определенного интеграла.
- Таблица интегралов.
- Формула Ньютона-Лейбница.

Пример 1: Вычислить интеграл $\int_0^1 \sqrt{x}\,dx$.

Решение: $\int_0^1 \sqrt{x}\,dx = \int_0^1 x^{1/2}dx = \frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}x\sqrt{x}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}\cdot 1\sqrt{1} - \frac{2}{3}\cdot 0\sqrt{0} = \frac{2}{3}$.

Пример 2: Вычислить интеграл $\int_2^8 \frac{2+x}{x}dx$.

Решение:

$$\int_2^8 \frac{2+x}{x}dx = \int_2^8 \left(\frac{2}{x} + \frac{x}{x}\right)dx = \int_2^8 \frac{2}{x}dx + \int_2^8 dx = \left(2\ln|x| + x\right)\Big|_2^8 =$$

$$= 2\ln|8| + 8 - \left(2\ln|2| + 2\right) = 2\ln 4 + 6.$$

2. ***Метод замены переменной***

Данный метод состоит во введении новой переменной интегрирования. Используется в том же случае, что и в неопределенном интеграле. Пусть требуется вычислить интеграл следующего вида:

$$\int_a^b f(\varphi(x))\ \varphi'(x)dx.$$

Введем новую переменную $t = \varphi(x)$, тогда дифференциал $dt = \varphi'(x)dx$, причем $t(a) = \alpha, t(b) = \beta$. Сделав замену переменных в определенном интеграле, получим

$$\int_a^b f(\varphi(x))\ \varphi'(x)dx = \int_\alpha^\beta f(t)dt = F(t)\Big|_\alpha^\beta = F(\beta) - F(\alpha)$$

Замечание: функция $\varphi(x)$ должна быть дифференцируемой и монотонной (возрастающей или убывающей) на промежутке $[a;b]$.

Пример 3: Вычислить интеграл $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x}}$.

Решение:

$$\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x}} = \left| \begin{matrix} t = 4-x, dt = -dx \\ t(0) = 4, t(2) = 2 \end{matrix} \right| = -\int\limits_4^2 \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\int\limits_4^2 t^{-\frac{1}{2}} dt = \int\limits_2^4 t^{-\frac{1}{2}} dt = \left. \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right|_2^4 = 2\sqrt{t} \Big|_2^4 =$$

$$= 2\sqrt{4} - 2\sqrt{2} = 4 - 2\sqrt{2}.$$

Замечания: 1) при замене переменной в определенном интеграле обязательно нужно ***менять пределы интегрирования***;

2) после вычисления первообразной ***не требуется возвращаться*** к старой переменной.

3. *Метод интегрирования по частям*

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – дифференцируемые функции переменной x. Тогда имеет место формула

$$\int\limits_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\,du,$$

называемая ***формулой интегрирования по частям в определенном интеграле.***

Она применяется в тех же случаях, что и в неопределенном интеграле, причем, выбор частей ведется таким же образом.

Пример 4: Вычислить интеграл $\int\limits_0^\pi x \sin x\,dx$.

Решение: Применим формулу интегрирования по частям. Положим

$$\left| \begin{matrix} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \sin x\,dx \Rightarrow v = -\cos x \end{matrix} \right|$$

Тогда

$$\int\limits_0^\pi x \sin x\,dx = -x\cos x\Big|_0^\pi + \int\limits_0^\pi \cos x\,dx = -\pi\cos\pi + 0\cdot\cos 0 + \sin x\Big|_0^\pi =$$

$$= \pi + \sin\pi - \sin 0 = \pi.$$

14.6. Некоторые приложения определенных интегралов

1. Вычисление площадей плоских фигур.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$. Если $f(x) \geq 0$, то площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$ (рис. 51) равна интегралу

$$S = \int_a^b f(x)\,dx.$$

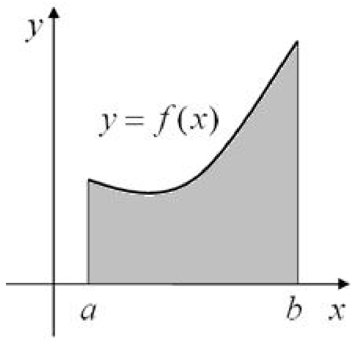


Рис. 51

Площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ (причем $f_1(x) \leq f_2(x)$ при $x \in [a;b]$) (рис. 52), можно найти по формуле

$$S = \int_a^b f_2(x)\,dx - \int_a^b f_1(x)\,dx = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x)\right)dx.$$

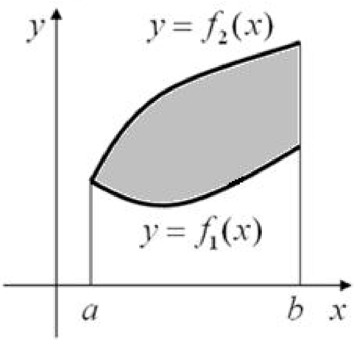


Рис. 52

2. Вычисление пути, пройденного телом за промежуток времени от t_1 до t_2, если известна мгновенная скорость $v = v(t)$, производится по формуле:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt.$$

Пример 4: Скорость поступательно движущегося тела $v = 8t - 1$ (м/с). Определить путь, пройденный телом за первые 10 с после начала движения.

Решение: Воспользуемся формулой для вычисления пути:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt \Rightarrow S = \int_0^{10} (8t - 1)\,dt = \left(4t^2 - t\right)\Big|_0^{10} = 4 \cdot 10^2 - 10 = 390\,(\text{м}).$$

14.7. Несобственные интегралы

При введении понятия определенного интеграла был введен ряд ограничений: функция $y = f(x)$ должна быть ограничена и определена на конечном промежутке $[a; b]$.

Если нарушается хотя бы одно из данных условий (промежуток интегрирования бесконечен или функция не ограничена), то возникают несобственные интегралы.

Различают несобственные интегралы I и II рода.

Несобственный интеграл I рода – это интеграл от конечной (ограниченной) функции на бесконечном промежутке (когда один или оба предела интегрирования бесконечны).

Несобственный интеграл II рода – это интеграл на конечном промежутке от бесконечной функции (функции, которая терпит на данном промежутке разрыв II рода).

Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на промежутке $[a;+\infty)$.

<u>*Определение:*</u> ***Несобственным интегралом I рода называется***

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{B\to+\infty}\int_{a}^{B} f(x)dx.$$

Если этот предел существует и конечен, то говорят, что ***интеграл сходится.*** Если предел не существует или бесконечен, то говорят, что ***интеграл расходится.***

Аналогично можно определить

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{A\to-\infty}\int_{A}^{b} f(x)dx.$$

Если оба предела интегрирования бесконечны, то, пользуясь свойством 8 определенного интеграла, разобьем промежуток интегрирования произвольной тоской c. В результате получим сумму двух интегралов, каждый из которых может быть вычислен по формулам, приведенным выше:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx.$$

Пример 5: Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость $\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$.

Решение: Данный интеграл является несобственным интегралом I рода. Воспользуемся определением:

$$\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^2} = \lim_{B\to\infty}\int_{1}^{B} x^{-2}dx = \lim_{B\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{1}^{B} = \lim_{B\to\infty}\left(-\frac{1}{B}+1\right) = -0+1=1.$$

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

Выберите правильный ответ.

1. ПРАВИЛЬНОЙ ФОРМОЙ ЗАПИСИ ФОРМУЛЫ НЬЮТОНА – ЛЕЙБНИЦА ЯВЛЯЕТСЯ

1) $\int_{a}^{b} f(x)\,dx = F(a) - F(b)$

2) $\int_{a}^{b} f(x)\,dx = F(b) - F(a) + C$

3) $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

4) $\int_a^b f(x)\,dx = F(a) - F(b) + C$

2. ПРАВИЛЬНЫМ ПРИМЕНЕНИЕМ СВОЙСТВ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА ЯВЛЯЕТСЯ

1) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

2) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$

3) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_b^a f(x)\,dx$

4) $\int_a^b \left(f_1(x) \cdot f_2(x)\right)dx = \int_a^b f_1(x)dx \cdot \int_a^b f_2(x)dx$

3. ПРАВИЛЬНЫМ ВЫЧИСЛЕНИЕМ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА ЯВЛЯЕТСЯ

1) $\int_0^1 xdx = x\Big|_0^1 = 0 - 1 = -1$

2) $\int_0^1 xdx = x\Big|_0^1 = 1 - 0 = 1$

3) $\int_0^1 xdx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{0^2}{2} - \frac{1^2}{2} = -\frac{1}{2}$

4) $\int_0^1 xdx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{1}{2}$

4. ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛА $\int_0^{\pi/4} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ ЗА НОВУЮ ПЕРЕМЕННУЮ НУЖНО ВЗЯТЬ

1) $t = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

2) $t = \sqrt{1-x^2}$

3) $t = 1 - x^2$

4) $t = \arcsin x$

5. ПРАВИЛЬНОЙ ФОРМУЛОЙ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ НЕСОБСТВЕННОГО ИНТЕГРАЛА ЯВЛЯЕТСЯ

1) $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{A\to-\infty}\int_{b}^{A} f(x)dx$

2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx - \int_{c}^{+\infty} f(x)dx$

3) $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{B\to+\infty}\int_{a}^{B} f(x)dx$

4) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx \cdot \int_{c}^{+\infty} f(x)dx$

§15. Дифференциальные уравнения

15.1. Основные понятия

Исследование различных процессов, происходящих в природе, может осуществляться с помощью построения их математических моделей в виде уравнений, связывающих независимую переменную, искомую функцию и ее производные. Такие уравнения называются дифференциальными (термин был введен Г. В. Лейбницем в 1676 году).

Определение: ***Дифференциальным уравнением*** называется уравнение, в котором неизвестная функция находится под знаком производной или дифференциала.

Например, рассмотрим второй закон Ньютона: величина ускорения пропорциональна действующей: $a = \frac{1}{m}F$.

Пусть тело движется прямолинейно под действием силы $F = F\left(x(t)\right)$, где $x(t)$ - координата тела в момент времени t. Тогда $a(t) = x''(t)$. Следовательно, $x''(t) = \frac{1}{m}F\left(x(t)\right)$, где m - масса тела. Полученное уравнение является дифференциальным, так как $x(t)$ входит в уравнение под знаком производной.

В общем виде дифференциальное уравнение может быть записано:

$$F\left(x, y, y', y'', \ \dots \ , y^{(n)}\right) = 0 \qquad (1)$$

или

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', \ \dots y^{(n-1)}\right) \qquad (2),$$

где $y = y(x)$ – неизвестная функция независимой переменной x.

Уравнение (2) называется ***дифференциальным уравнением, разрешенным относительно высшей производной.***

<u>Определение:</u> ***Порядком дифференциального уравнения*** называется наивысший порядок производной, входящей в это уравнение.

Например:

$xy - 2y'' = 4xy'''$ – уравнение 3 порядка;

$xy'' - 2y' = 4xy$ – уравнение 2 порядка

<u>Определение:</u> ***Решением дифференциального уравнения*** называется любая функция, при подстановке которой уравнение обращается в тождество.

15.2. Задачи, приводящие к решению дифференциальных уравнений

1. Изучение движения тела под действием переменной силы (второй закон Ньютона).
2. Изучение динамики популяций – скорость роста популяции пропорциональна размеру популяции: $\frac{dN(t)}{dt} = kN(t)$.
3. Изучение радиоактивного распада – скорость распада пропорциональна числу нераспавшихся атомов: $\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t)$.
4. Изучение размножения бактерий – скорость прироста массы бактерий пропорциональна самой массе: $\frac{dm(t)}{dt} = km(t)$.

Решение этих уравнений позволяет получить законы, моделирующие математически данные процессы (закон радиоактивного распада, закон роста популяции и т.п.).

15.3. Дифференциальные уравнения 1 порядка

Дифференциальное уравнение 1 порядка может содержать независимую переменную *x*, функцию $y = y(x)$ и ее производную $y' = y'(x)$. В общем виде оно может быть записано:

$$F(x, y, y') = 0 \qquad (1)$$

$$y' = f(x, y) \qquad (2)$$

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \qquad (3)$$

где $y = y(x)$ – искомая функция, $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ – заданные функции.

<u>Определение:</u> Уравнение (2) называется ***дифференциальным уравнением 1 порядка, выраженным (разрешенным) относительно производной.*** Уравнение (3) называется дифференциальным ***уравнением 1 порядка в дифференциалах.***

Учитывая, что $y' = \frac{dy}{dx}$, эти три формы записи могут переходить друг в друга.

Рассмотрим в качестве примера дифференциальное уравнение $y' = 2x$. Решением данного дифференциального уравнения будет являться функция $y = x^2 + C$, так как при подстановке данной функции уравнение обратится в тождество:

$$\left(x^2 + C\right)' = 2x.$$

Отметим, что решение дифференциального уравнения содержит произвольную постоянную C.

<u>Определение:</u> ***Общим решением дифференциального уравнения 1*** порядка называется функция $y = \varphi(x, C)$ (или $\varphi(x, y, C) = 0$), при подстановке которой уравнение обращается в тождество.

<u>Определение:</u> ***Частным решением дифференциального уравнения 1 порядка*** называется функция $y = \varphi(x, C_0)$ (или $\varphi(x, y, C_0) = 0$), полученная из общего решения при подстановке конкретного значения C_0.

Таким образом, дифференциальные уравнения имеют бесконечное множество частных решений, которые могут быть получены из общего решения путем подстановки $C = C_0$. Как правило, частное решение находится не произвольным образом, а исходя из определенных условий.

<u>Определение:</u> Условие, что при $x = x_0$ значение функции равно заданному числу $y = y_0$, называется ***начальным условием.***

Записывается: $y(x_0) = y_0$.

С геометрической точки зрения общее решение $y = \varphi(x, C)$ – это множество кривых на плоскости *XOY*, частное решений – это одна из кривых $y = \varphi(x, C_0)$, проходящая через точку $(x_0; y_0)$.

<u>Определение:</u> Задача о решении дифференциального уравнения с заданными начальными условиями называется ***задачей Коши*** (по имени французского математика, сформулировавшего это задачу и доказавшего, что при выполнении ряда условий частное решение обязательно существует, причем является единственным).

15.4. Дифференциальные уравнения 1 порядка с разделяющимися переменными

Дифференциальным уравнения 1 порядка с разделяющимися переменными называется дифференциальное уравнение вида:

$$M_1(x)M_2(y)dx + N_1(x)N_2(y)dy = 0.$$

Особенность этого уравнения состоит в том, что коэффициенты при dx и dy представляют собой произведение двух функций, одна из которых зависит только от переменной x, а другая – только от переменной y.

Решим данное уравнение. Для этого перенесем второе слагаемое в правую часть:

$$M_1(x)M_2(y)dx = -N_1(x)N_2(y)dy.$$

Разделим обе части на $M_2(y)N_1(x)dy$. Получим

$$\frac{M_1(x)M_2(y)}{M_2(y)N_1(x)}dx = -\frac{N_1(x)N_2(y)dy}{M_2(y)N_1(x)}dy$$

$$\frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx = -\frac{N_2(y)dy}{M_2(y)}dy$$

В полученном дифференциальном уравнении переменные *x* и *y* разделены: правая часть зависит только от *x*, а левая – только от *y*. Оно называется ***дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными.*** Для нахождения общего решения его нужно проинтегрировать

$$\int \frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx = -\int \frac{N_2(y)dy}{M_2(y)}dy$$

Пример 1: Найти общее решение $\left(x^2+1\right)dy - 2xy\,dx = 0$.

Решение: Данное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными, т.к. коэффициент при *dy* – функция, зависящая только от *x*, при *dx* – произведение функций, одна из которых зависит только от *x*, другая – только от *y*. Перенесем второе слагаемое в правую часть:

$$\left(x^2+1\right)dy = 2xy\,dx.$$

Разделим обе части уравнения на произведение $y\left(x^2+1\right)$

$$\frac{dy}{y} = \frac{2x\,dx}{\left(x^2+1\right)}.$$

Проинтегрируем его

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{2x\,dx}{\left(x^2+1\right)}.$$

Найдем эти интегралы:

$$\int \frac{dy}{y} = \ln|y| + C, \int \frac{2x\,dx}{\left(x^2+1\right)} = \begin{vmatrix} t = x^2+1 \\ dt = 2x\,dx \end{vmatrix} = \int \frac{dt}{t} = \ln\left|x^2+1\right| + C.$$

Тогда общее решение уравнения имеет вид

$$\ln|y| = \ln\left|x^2+1\right| + \ln C$$

или

$$\ln|y| = \ln\left|C\left(x^2+1\right)\right| \Rightarrow y = C\left(x^2+1\right).$$

Дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными является также уравнение вида $y' = f(x)g(y)$. Для его решения нужно сначала представить производную в виде $y' = \frac{dy}{dx}$, затем умножить обе части на dx.

Пример 2: $y' = -\frac{x}{y}$.

Решение: Данное уравнение можно переписать так:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Домножим обе части уравнения на ydx:

$$y\,dy = -x\,dx.$$

Интегрируя обе части уравнения получим:

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C_1 \text{ или } y^2 = -x^2 + 2C_1.$$

Полагая $2C_1 = C$ получим общее решение уравнения $y^2 + x^2 = C$.

15.5. Дифференциальные уравнения 2 порядка

Дифференциальное уравнение 2 порядка может содержать независимую переменную x, функцию $y = y(x)$ и ее производные первого и второго порядка. В общем виде оно может быть записано:

$$F(x, y, y', y'') = 0 \qquad (1)$$

$$y'' = f(x, y, y') \qquad (2)$$

где $y = y(x)$.

Определение: Уравнение (1) называется ***дифференциальным уравнением 2 порядка.*** Уравнение (2) называется ***дифференциальным уравнением 2 порядка, выраженным (разрешенным) относительно производной.***

Отметим, что решение дифференциального уравнения 2 порядка содержит две произвольных постоянных C_1 и C_2.

Определение: ***Общим решением (общим интегралом) дифференциального уравнения 2 порядка*** называется функция $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ (или $\varphi(x, y, C_1, C_2) = 0$), при подстановке которой уравнение обращается в тождество.

Определение: Условия $y = y_0$, $y' = y_0'$ при $x = x_0$ ***называются начальными условиями.***

Определение: ***Частным решением дифференциального уравнения 2 порядка*** называется функция $y = \varphi\left(x, C_1^0, C_2^0\right)$ (или $\varphi\left(x, y, C_1^0, C_2^0\right) = 0$), полученная из общего решения при подстановке конкретных значений $C_1 = C_1^0, C_2 = C_2^0$.

Пример 3: Найти общее и частное решение уравнения $y'' = 2$ при начальных условиях $y_0 = 1, y_0' = 1$ при $x_0=1$.

Решение: Сделаем замену переменных: $y' = p(x) \Rightarrow y'' = p'(x)$. Подставив новую переменную в уравнение, получим дифференциальное уравнение 1 порядка:

$$p'(x) = 2 \Rightarrow \frac{dp}{dx} = 2 \Rightarrow dp = 2dx \Rightarrow \int dp = 2\int dx \Rightarrow p(x) = 2x + C_1.$$

Так как $y' = p(x)$, получим уравнение

$$y' = 2x + C_1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2x + C_1 \Rightarrow dy = \left(2x + C_1\right)dx \Rightarrow$$

$\Rightarrow \int dy = \int \left(2x + C_1\right)dx \Rightarrow y = x^2 + C_1x + C_2$ - общее решение.

Найдем частное решение уравнения. Для этого подставим начальные условия в производную и в общее решение и найдем C_1 и C_2.

$$y' = 2x + C_1 \Rightarrow 1 = 2 \cdot 1 + C_1 \Rightarrow C_1 = -1,$$

$$y = x^2 + C_1x + C_2 \Rightarrow 1 = 1^2 - 1 \cdot 1 + C_2 \Rightarrow C_2 = 1.$$

Запишем частное решение, подставив в общее значения C_1 и C_2:

$$y = x^2 - x + 1.$$

15.6. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Определение: ***Линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами*** называется уравнение вида

$$y'' + py' + qy = 0, \qquad (1)$$

где p и q – числа.

Будем искать частное решение в виде $y = e^{kx}$,где k – некоторое число.

Тогда $y' = k \cdot e^{kx}$, $y'' = k^2 \cdot e^{kx}$.

Подставляя в уравнение (1), получим

$$k^2 \cdot e^{kx} + p \cdot k \cdot e^{kx} + q \cdot e^{kx} = 0,$$

$$e^{kx} \cdot (k^2 + p \cdot k + q) = 0.$$

Разделив на $e^{kx} \neq 0$, получим алгебраическое уравнение для определения показателя k.

$$k^2 + p \cdot k + q = 0 \qquad (2)$$

Определение: Уравнение (2) называется ***характеристическим уравнением дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.***

Характеристическое уравнение получается из дифференциального формальной заменой в нем $y''\to k^2$, $y'\to k$, $y\to 1$. Таким образом, решение дифференциального уравнения сводится к решению алгебраического уравнения (2).

Данное уравнение является квадратным. При его решении возможны три случая:

- если D > 0, то уравнение имеет два различных действительных корня;
- если D = 0, то уравнение имеет два совпадающих действительных корня;
- если D < 0, то уравнение не имеет действительных корней, его корни являются комплексными (см. Приложение 3).

Теорема: *Пусть дано дифференциальное уравнение* (1) *и его характеристическое уравнение* (2).

1. Если корни характеристического уравнения k_1 и k_2 –действительные и различные, то все решения дифференциального уравнения (1) *задаются формулой*

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x},$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

2. Если корни k_1 и k_2 – действительные и равные числа, то все решения дифференциального уравнения (1) *задаются формулой*

$$y = \left(C_1 x + C_2\right) e^{kx}.$$

3. Если корни характеристического уравнения k_1 и k_2 – комплексные числа, т.е. $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ $\left(i = \sqrt{-1}, \alpha = \dfrac{-p}{2}, \beta = \dfrac{\sqrt{-D}}{2}\right)$, то все решения дифференциального уравнения (1) задаются формулой

$$y = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x\right).$$

Пример 4: Найти общее решение уравнения $y'' - 4y' + 3y = 0$.

Решение: Составим характеристическое уравнение и решим его:

$k^2 - 4k + 3 = 0, D = 16 - 12 = 4 > 0 \Rightarrow$ уравнение имеет два действительных корня $k_1 = 1, k_2 = 3$. Тогда решение дифференциального уравнения имеет вид:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{3x}.$$

Пример 5: Найти общее решение уравнения $y'' + 4y' + 4y = 0$.

Решение: Составим характеристическое уравнение и решим его:

$k^2 + 4k + 4 = 0, D = 16 - 16 = 0 \Rightarrow$ уравнение имеет один действительный корень, т.е. $k_1 = k_2 = -2$. Тогда решение дифференциального уравнения имеет вид:

$$y = \left(C_1 x + C_2\right) e^{-2x}.$$

Пример 6: Найти общее решение уравнения $y'' - 4y' + 13y = 0$.

Решение: Составим характеристическое уравнение и решим его:

$k^2 - 4k + 13 = 0, D = 16 - 52 = -36 < 0 \Rightarrow$ уравнение имеет два комплексных корня $k_{1,2} = 2 \pm 3i \Rightarrow \alpha = 2, \beta = 3$. Тогда решение дифференциального уравнения имеет вид:

$$y = e^{2x}\left(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x\right).$$

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

Выберите правильный ответ.

1. УРАВНЕНИЕ, СОДЕРЖАЩЕЕ НЕИЗВЕСТНУЮ ФУНКЦИЮ ПОД ЗНАКОМ ПРОИЗВОДНОЙ ИЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛА, НАЗЫВАЕТСЯ
   1) линейным
   2) квадратным
   3) дифференциальным
   4) интегральным
2. РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ, ПОЛУЧЕННОЕ ПРИ ПОДСТАНОВКЕ В РЕШЕНИЕ $y=\varphi(x,C)$ ВМЕСТО C КОНКРЕТНОГО ЗНАЧЕНИЯ C_0, НАЗЫВАЕТСЯ
   1) общим решением
   2) частным решением
   3) общим интегралом
   4) корнем дифференциального уравнения
3. ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ $y'=\left(y^2+1\right)\cos x$ БУДЕТ ИМЕТЬ ВИД
   1) $\operatorname{arctg} y=\sin x+C$
   2) $\operatorname{arctg} x=\sin y+C$
   3) $\operatorname{arctg} y=-\sin x+C$
   4) $\operatorname{arctg} x=-\sin y+C$
4. ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ $y''+3y'=0$ БУДЕТ ИМЕТЬ ВИД
   1) $y=C_1e^{-3x}+C_2e^{3x}$
   2) $y=C_1+C_2e^{-3x}$
   3) $y=C_1+C_2e^{3x}$
   4) $y=C_1\cos\sqrt{3}x+C_2\sin\sqrt{3}x$
5. ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ $y''-3y'+2y=0$ БУДЕТ ИМЕТЬ ВИД
   1) $y=C_1e^{x}+C_2e^{2x}$
   2) $y=\left(C_1x+C_2\right)e^{2x}$
   3) $y=e^{x}\left(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x\right)$
   4) $y=e^{2x}\left(C_1\cos x+C_2\sin x\right)$

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

§16. Основы комбинаторики

В математике существует много задач, в которых требуется из имеющихся элементов составить различные комбинации, вычислять количество комбинаций, образованных по определенному правилу. Такие задачи называются ***комбинаторными***, а раздел математики – ***комбинаторикой.*** Комбинаторные задачи решали еще в Древнем Китае и в Римской Империи.

Как раздел математики комбинаторика возникла в XVI веке. Ее развитие связано с именами таких ученых, как Н. Тарталья (1500 – 1557), Б. Паскаль (1623 – 1662), П. Ферма (1601 – 1665), Я. Бернулли (1654 – 1705) и Л. Эйлер (1707 – 1783). Возрождение интереса к комбинаторике относится к 50-м годам XX века. Оно связано с развитием кибернетики и дискретной математики.

Комбинаторика – это раздел математики, в котором изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций, удовлетворяющих тем или иным условиям, можно составить из заданных объектов.

Решение большинства комбинаторных задач основано на применении двух основных правил – правила суммы и правила произведения.

Правило суммы: Если элемент A можно выбрать m способами, а элемент B - n способами (причем, ни один из способов выбора элемента A не совпадает со способом выбора элемента B), то выбрать A или B можно $m + n$ способами.

Пример 1: В корзине лежат 8 яблок, 6 груш и 3 помидора. Сколькими способами можно выбрать один фрукт?

Решение: Количество способов, которыми можно выбрать один фрукт (яблоко или грушу), равно 8 + 6, то есть 14.

Правило произведения: Если элемент A можно выбрать m способами и после каждого такого выбора элемент B можно выбрать n, то выбрать упорядоченную пару (A,B) можно $m \cdot n$ способами.

Пример 2: Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, и 5, если: а) цифры не повторяются; б) цифры могут повторяться?

Решение:

а) цифры не повторяются, следовательно, в разряд сотен цифру можно выбрать 5-ю способами, в разряд десятков можно выбрать одну из оставшихся 4-х цифр, а в разряд единиц – 3-мя способами. Тогда составить трехзначное число можно $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ способами.

б) цифры могут повторяться, следовательно, в этом случае в каждом разряде можно выбрать цифру 5-ю способами. Таким образом, получим $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ способов.

Правила произведения и суммы часто используются в решении задач. Кроме них часто используются специальные формулы для перестановок, размещений и сочетаний.

16.1. Перестановки

Определение: ***Перестановками*** называются различные комбинации, образованные из n элементов, расположенных в определенном порядке.

Количество перестановок обозначается P_n и вычисляется по формуле:

$$P_n = n!,$$

где $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... (n-1) \cdot n$ – произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно.

Пример 3: Цифры 0, 1, 2, 3 написаны на четырех карточках. Сколько различных четырехзначных чисел можно составить из этих карточек?

Решение: Количество различных четырехзначных чисел будет равно числу перестановок P_4. Однако мы должны исключить числа, первая цифра которых 0. Их количество составит P_3.

Таким образом, $N = P_4 - P_3 = 4! - 3! = 18$.

16.2. Размещения

Определение: ***Размещениями*** называются упорядоченные комбинации, составленные из m элементов, отобранных из множества, содержащего n элементов (то есть, они могут отличаться друг от друга или составом элементов, или их порядком, или и тем, и другим одновременно).

Количество размещений обозначается A_n^m и вычисляется по формуле:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Пример 4: Студентам надо сдать 4 экзамена за 8 дней. Сколькими способами можно составить расписание сдачи экзаменов?

Решение: Чтобы составить расписание необходимо:

1) выбрать в какие дни будут поставлены экзамены;

2) указать в каком порядке они будут поставлены.

Следовательно, способы составления расписания являются размещениями, и их количество может быть вычислено по формуле $A_8^4 = \frac{8!}{4!} = 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 1680$.

16.3. Сочетания

Определение: ***Сочетаниями*** называются неупорядоченные комбинации, составленные из m элементов, отобранных из множества, содержащего n элементов (то есть, они отличаются друг от друга только составом элементов).

Количество сочетаний обозначается C_n^m и вычисляется по формуле:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Пример 5: В хоккейном турнире участвуют 6 команд. Каждая команда должна сыграть с каждой одну игру. Сколько игр будет сыграно в турнире?

Решение: В каждой игре участвуют две команды, порядок в данном случае неважен. Следовательно, количество игр определяется числом сочетаний из 6 по 2:

$$C_6^2 = \frac{6!}{2! \cdot 4!} = 15 .$$

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

Выберите правильный ответ.

1. РАЗЛИЧНЫЕ КОМБИНАЦИИ, ОБРАЗОВАННЫЕ ИЗ n ЭЛЕМЕНТОВ, РАСПОЛОЖЕННЫХ В ОПРЕДЕЛЕННОМ ПОРЯДКЕ, НАЗЫВАЮТСЯ
   1) размещениями
   2) перестановками
   3) сочетаниями
   4) событиями
2. НЕУПОРЯДОЧЕННЫЕ КОМБИНАЦИИ, СОСТАВЛЕННЫЕ ИЗ m ЭЛЕМЕНТОВ, ОТОБРАННЫХ ИЗ МНОЖЕСТВА, СОДЕРЖАЩЕГО n ЭЛЕМЕНТОВ, НАЗЫВАЮТСЯ
   1) размещениями
   2) перестановками
   3) сочетаниями
   4) событиями
3. УПОРЯДОЧЕННЫЕ КОМБИНАЦИИ, СОСТАВЛЕННЫЕ ИЗ m ЭЛЕМЕНТОВ, ОТОБРАННЫХ ИЗ МНОЖЕСТВА, СОДЕРЖАЩЕГО n ЭЛЕМЕНТОВ, НАЗЫВАЮТСЯ
   1) размещениями
   2) перестановками
   3) сочетаниями
   4) событиями
4. КОЛИЧЕСТВО РАЗМЕЩЕНИЙ ВЫЧИСЛЯЕТСЯ ПО ФОРМУЛЕ
   1) $\frac{(n-m)!}{n!}$
   2) $\frac{n!}{m!(n-m)!}$
   3) $\frac{n!}{(n-m)!}$
   4) $\frac{m!}{n!(n-m)!}$

5. КОЛИЧЕСТВО СОЧЕТАНИЙ ВЫЧИСЛЯЕТСЯ ПО ФОРМУЛЕ

1) $\dfrac{(n-m)!}{n!}$

2) $\dfrac{n!}{m!(n-m)!}$

3) $\dfrac{n!}{(n-m)!}$

4) $\dfrac{m!}{n!(n-m)!}$

§17. Введение в теорию вероятностей

17.1. Основные понятия теории вероятностей

Определение: ***Опытом, экспериментом или испытанием*** называют всякое осуществление определенного комплекса условий или действий, при которых происходит соответствующее явление.

Определение: ***Выборочным пространством эксперимента*** называют множество всех возможных исходов данного эксперимента.

Оно может быть *конечным* (подбрасывается кубик – 6 возможных исходов), *бесконечным* (бросается мяч и измеряется расстояние до точки падения) или *счетным* (подбрасывается монета и подсчитывается число бросков до первого выпадения герба).

Определение: ***Исход эксперимента*** называется элементарным событием (или элементарным исходом), если в результате эксперимента наступает один и только один элементарный исход.

Например, монета подбрасывается 2 раза. Найти все возможные элементарные события. В результате возможны следующие исходы: $\{р; р\}$, $\{р; г\}, \{г; р\}, \{г; г\}$.

Определение: ***Событием*** называют возможный результат эксперимента.

Событие может содержать в себе один или несколько элементарных исходов и может рассматриваться как подмножество множества элементарных исходов.

Пример 6: Подбрасывают игральную кость. Элементарными событиями в данном случае являются выпадение 1, 2, 3, 4, 5 или 6 очков. Событие A, состоящее в выпадении числа очков, кратного 3, не является элементарным, т.к. содержит в себе два элементарных исхода: выпадение 3 и выпадение 6 очков.

Все события можно разделить на 2 группы: детерминированные события и случайные.

Определение: ***Случайное событие*** – это событие, про которое заранее неизвестно, произойдет оно или не произойдет в данном комплексе условий.

Например, выпадение герба при подбрасывании монеты, попадание в цель при выстреле.

Случайные события принято обозначать заглавными начальными буквами латинского алфавита: A, B, C...

<u>Определение:</u> ***Детерминированное событие*** **–** это событие, про которое известно заранее, произойдет оно или не произойдет в данном комплексе условий.

Если событие обязательно произойдет в данном комплексе условий, то оно называется ***достоверным***.

Например, при нормальном атмосферном давлении и температуре $+100^{o}C$ вода точно закипит.

Если событие никогда не произойдет в данном комплексе условий, то оно называется ***невозможным***.

Например, при нормальном атмосферном давлении и температуре $+100^{o}C$ вода никогда не превратится в лед.

Достоверные события принято обозначать U или Ω, невозможные события – V или $\varnothing$.

Пример 7: Подбрасываем игральный кубик. Определить какими являются следующие события:

а) выпадение 7 очков;

б) выпадение числа очков не более 6;

в) выпадение 4 очков.

Решение:

а) выпадение 7 очков – невозможное событие, так как на кубике нет грани с 7-ю очками;

б) выпадение числа очков не более 6 – достоверное событие, так как при подбрасывании кубика обязательно выпадет одно из этих чисел;

в) выпадение 4 очков – случайное событие, так как может выпасть, а может и не выпасть при подбрасывании кубика.

17.2. Виды событий

<u>Определение:</u> События A и B называются ***несовместными,*** если в результате испытания они никогда не могут наступить вместе.

Несовместные события не содержат в себе общих элементарных исходов.

Например, A – выпадение герба; B – выпадение решки.

<u>Определение:</u> События A и B называются ***совместными,*** если в результате испытания они могут наступить вместе.

Совместные события содержат в себе общие элементарные исходы.

Например, A – появление четного числа очков, B – появление не менее 4 очков; общие элементарные исходы – появление 4 и 6.

<u>Определение:</u> Событие A называется ***благоприятствующим событию B,*** если при наступлении A неизбежно наступает B.

Например, A – появление 4 очков, B – появление четного числа очков. Наступления события A влечет за собой наступление события B, следовательно, событие A благоприятствует событию B.

<u>Определение:</u> События называются ***равновозможными,*** если условия эксперимента не создают преимуществ в наступлении одного события перед другим.

Например, A – выпадение герба; B – выпадение решки.

17.3. Классическое определение вероятности

Вероятность случайного события – это число, которое характеризует возможность появления данного события в эксперименте. Обозначается она буквой P (от французского probabilite – вероятность). Существуют различные способы определения этого понятия.

<u>Определение:</u> Если опыт, в котором может наступить событие A имеет конечное число исходов, причем эти исходы равновозможны, то ***вероятность*** $P(A)$ события A вычисляется по формуле:

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где n – общее число элементарных исходов, m – число элементарных исходов, благоприятствующих событию A.

Пример 8: В урне 2 белых и 8 черных шаров. Наугад извлекают один шар. Найти вероятность того, что он будет белый.

Решение: Общее количество способов, которыми можно извлечь один шар является конечным, все способы равновозможны. Поэтому можно воспользоваться классическим определением вероятности.

В урне всего $n = 2 + 8 = 10$ шаров, из них 2 белых, т.е. $m = 2 \Rightarrow P = \frac{2}{10} = 0,2$.

Свойства вероятности.

1. Вероятность достоверного события равна 1.
2. Вероятность невозможного события равна 0.
3. Вероятность любого события A удовлетворяет двойному неравенству
$$0 \le P(A) \le 1.$$

17.4. Статистическое определение вероятности

Статистическое определение вероятности связано с понятием относительной частоты события.

<u>Определение:</u> ***Относительной частотой события*** A называют отношение числа испытаний, в которых наступило событие A к общему числу проведенных испытаний:

$$\nu(A) = \frac{m}{n}.$$

Относительная частота обладает свойством *статистической устойчивости*: при проведении серий с большим количеством испытаний относительные частоты будут группироваться вокруг некоторого числа. Это число и будет являться статистической вероятностью события A.

В проведенных французским естествоиспытателем Ж. Бюффоном и английским математиком К. Пирсоном опытах по изучению относительной частоты выпадения герба при бросании монеты были получены результаты, приведенные в таблице 4:

Таблица 4

Результаты эксперимента подбрасывания монеты

Экспериментатор	Число бросаний	Число выпадения герба	Относительная частота
Ж.Бюффон	4040	2048	0,5069
К.Пирсон	12000	6019	0,5016
К.Пирсон	24000	12012	0,5005

Можно заметить, что все полученные частоты находятся вблизи числа 0,5, которое может быть вычислено с помощью классического определения вероятности. Впоследствии Я. Бернулли сформулировал теорему, которая связывает классическое и статистическое определения вероятности.

Пример 9: На фармацевтическом заводе отделом технического контроля было обнаружено, что из 100 проверенных единиц лекарственного препарата 5 единиц не соответствовали стандарту. Найти вероятность отклонения от стандарта для данного препарата.

Решение: Используем статистическое определение вероятности. Общее число проведенных испытаний $n = 100$. Событие A, состоящие в отклонении от стандарта наступило в $m = 5$. Следовательно, $P(A) \approx \frac{5}{100} = 0,05$.

17.5. Операции над событиями (алгебра событий)

Пусть A и B два события, соответствующие одному опыту.

Определим операции над событиями, проиллюстрировав их геометрически при помощи диаграмм Эйлера-Вьенна. Пусть на плоскость, ограниченную прямоугольником, наудачу бросается точка, и пусть события A и B состоят в том, что эта точка попадает соответственно в круг A или в круг B. Попадание в прямоугольник есть событие Ω – достоверное (рис. 53).

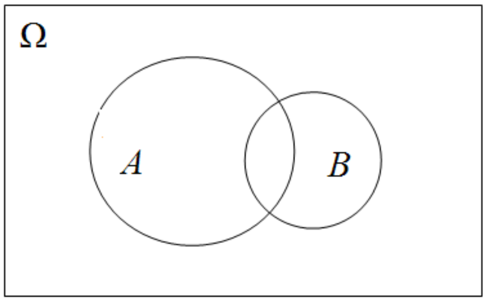
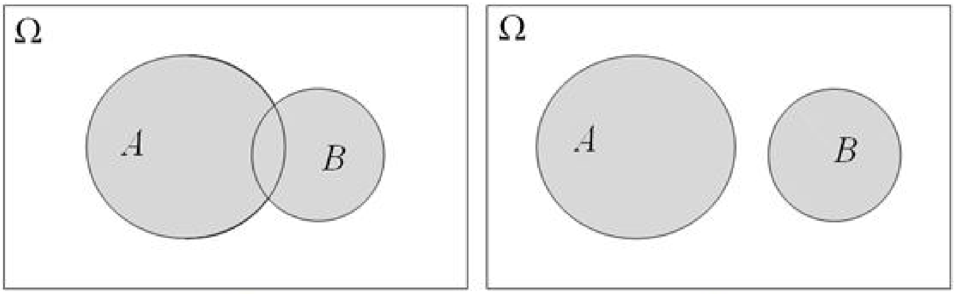


Рис. 53

<u>Определение:</u> ***Суммой событий*** A и B называется событие C, которое состоит либо в наступлении события A, либо в наступлении события B, либо в их

одновременном наступлении. На рисунке 54 приведена иллюстрация суммы совместных (а) и несовместных (б) событий.



а *б*

Рис. 54

Обозначается $C=A+B$.

Пример 10: Два стрелка производят по одному выстрелу по мишени. A – попадание в мишень первым стрелком, B – попадание в мишень вторым стрелком. Тогда суммой двух событий является событие $C=A+B$ – попадание в мишень.

<u>Определение:</u> ***Произведением событий*** A и B называется событие C, которое состоит в одновременном наступлении событий A и B (рис. 55).

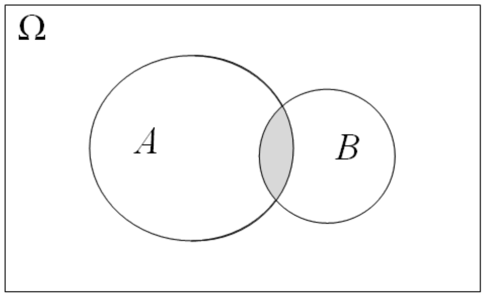


Рис. 55

Обозначается $C=A\cdot B$.

Пример 11:

$C=A\cdot B$ – оба стрелка попадут в мишень (см. пример 10).

<u>Определение:</u> ***Событием, противоположным событию*** A***,*** называется событие, которое состоит в ненаступлении события A (рис. 56).

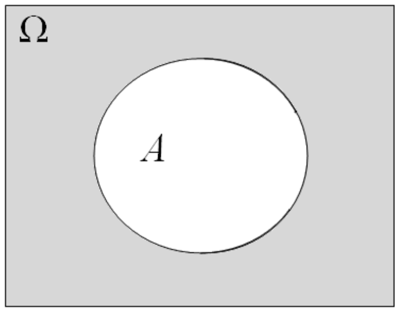


Рис. 56

Обозначается $\overline{A}$.

Пример 12:

$\overline{A}$ – первый стрелок не попадет в мишень,

$\overline{B}$ – второй стрелок не попадет в мишень (см. пример 10) .

17.6. Вероятность суммы и произведения событий

<u>**Теорема 1**</u>**.** *Вероятность суммы двух событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:*

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

<u>**Доказательство:**</u>

Для доказательства данной теоремы воспользуемся классическим определением вероятности.

Введем обозначения:

Пусть n – общее число возможных элементарных исходов испытания;

m_A – число исходов, благоприятствующих событию A;

m_B – число исходов, благоприятствующих событию B;

m_{AB} – число исходов, благоприятствующих совместному наступлению событий A и B;

m_{A+B} – число исходов, благоприятствующих наступлению суммы событий A и B, причем $m_{A+B} = m_A + m_B - m_{A\cdot B}$ (m_{AB} вычитаем, т.к. общие исходы событий A и B суммируются дважды).

Следовательно

$$P(A+B) = \frac{m_A + m_B - m_{A\cdot B}}{n} = \frac{m_A}{n} + \frac{m_B}{n} - \frac{m_{A\cdot B}}{n} = P(A) + P(B) - P(A\cdot B).$$

Следствие1. *Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий* $P(A+B) = P(A) + P(B)$.

Следствие 2. *Вероятность суммы нескольких попарно несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий*

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n).$$

Следствие 3. *Вероятность противоположного события может быть вычислена по формуле:* $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Определение: Вероятность события B**,** вычисленная при условии, что событие A произошло ($P(A) \neq 0$), называется ***условной вероятностью события*** A относительно события B и обозначается $P\left(B/_A\right)$.

Определение. Событие B называется ***независимым от события*** A, если вероятность события B не зависит от того, произошло событие A или нет, то есть

$$P\left(B/_A\right) = P\left(B/_{\overline{A}}\right) = P(B).$$

Пример 13: В урне лежит 2 белых и 3 черных шарика. Достают последовательно 2 шарика, не возвращая их обратно в урну. Пусть событие A состоит в том, что первый вытащенный шар белый. Событие B – второй вытащенный шар белый. Установить, зависит ли B от A.

Решение:

Число шаров в урне равно $n = 5$.

A – первый вытащенный шар белый, следовательно, после этого в урне остался один белый шар ($m = 1$) $\Rightarrow P\left(B/_A\right) = \dfrac{1}{4}$.

$\overline{A}$ – первый вытащенный шар черный, следовательно, после этого в урне осталось два белых шара ($m = 2$) $\Rightarrow P\left(B/_{\overline{A}}\right) = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow P\left(B/_A\right) \neq P\left(B/_{\overline{A}}\right) \Rightarrow$ событие B зависит от A.

Теорема 2. *Вероятность произведения (совместного появления) двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную при условии, что первое событие уже наступило:*

$$P(AB) = P(A)\cdot P\left(B/_A\right).$$

<u>Следствие.</u> *Вероятность произведения нескольких событий равна произведению вероятностей этих событий, причем вероятность каждого следующего события вычисляется при условии, что все предыдущие уже произошли:*

$$P(A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_n) = P(A_1)\cdot P\left(A_2/_{A_1}\right)\cdot P\left(A_3/_{A_1\cdot A_2}\right)\cdot\ldots\cdot P\left(A_n/_{A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_{n-1}}\right).$$

Теорема 3. *Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:* $P(AB) = P(A)\cdot P(B)$.

<u>Следствие.</u> *Вероятность произведения нескольких независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:*

$$P(A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_n) = P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot\ldots\cdot P(A_n).$$

Пример 14: Два стрелка стреляют по мишени. Вероятности их попадания составляют 0,7 и 0,8 соответственно. Найти вероятность того, что попадут оба стрелка и попадет только один стрелок.

Решение: Введем элементарные события:

A – первый стрелок попадает по мишени $\Rightarrow P(A) = 0,7 \Rightarrow P(\overline{A}) = 0,3$.

B – второй стрелок попадает по мишени $\Rightarrow P(B) = 0,8 \Rightarrow P(\overline{B}) = 0,2$.

Событие, состоящее в том, что оба стрелка попадут в мишень, представляет собой произведение событий A и B. Найдем вероятность этого события.

События A и B являются независимыми, поэтому вероятность того, что попадут оба стрелка, равна $P(A\cdot B) = P(A)\cdot P(B) = 0,7\cdot 0,8 = 0,56$.

Вероятность, что попадет только один стрелок можно представить как $A\cdot\overline{B} + \overline{A}\cdot B$, причем события $A\cdot\overline{B}$ и $\overline{A}\cdot B$ являются несовместными, т.к. не могут происходить одновременно. События A и $\overline{B}$, $\overline{A}$ и B являются независимыми, поэтому вероятность того, что попадет только один стрелок, равна

$$P(A\cdot\overline{B} + \overline{A}\cdot B) = P(A\cdot\overline{B}) + P(\overline{A}\cdot B) = P(A)\cdot P(\overline{B}) + P(\overline{A})\cdot P(B) =$$
$$= 0,7\cdot 0,2 + 0,8\cdot 0,3 = 0,38.$$

Пример 15: В читальном зале 6 учебников по теории вероятностей, из них только два имеют все страницы. Какова вероятность того, что двум друзьям, пришедшим в читальный зал, достанутся оба учебника со всеми страницами?

Решение:

A – первому достанется учебник со всеми страницами.

B – второму достанется учебник со всеми страницами.

Число учебников по теории вероятностей равно шести ($n = 6$).

Вероятность того, что первому достанется учебник со всеми страницами равна $P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ (т.к. для первого из друзей $m = 2$).

События A и B являются зависимыми, поэтому вероятность того, что второму достанется учебник со всеми страницами составляет $P\left(B/A\right)=\frac{1}{5}$ (т.к. для второго из друзей $m = 1$, $n = 5$).

Следовательно, вероятность их совместного наступления равна

$$P(AB)=P(A)\cdot P\left(B/A\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{15}.$$

17.7. Формула полной вероятности. Формула Байеса

Определение: События $H_1, H_2, H_3, ..., H_n$ образуют ***полную группу попарно несовместных событий,*** если выполняются следующие условия:

- эти события попарно несовместны, то есть $H_i \cdot H_j = V$ при $i \neq j$ (произведение любых двух из них есть невозможное событие);
- в сумме эти события дают достоверное событие: $H_1 + H_2 + ... + H_n = U$.

События $H_1, H_2, H_3, ..., H_n$ принято называть ***гипотезами.***

Пусть некоторое событие A может происходить только после реализации одного из событий $H_1, H_2, H_3, ..., H_n$, образующих полную группу событий, причем, известны вероятности наступления гипотез $P(H_i)$ и условные вероятности $P\left(A/H_i\right)$. В этом случае будет справедлива формула:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(H_i)\cdot P\left(A/H_i\right),$$

которая называется ***формулой полной вероятности***.

Формула полной вероятности учитывает как вклад каждой гипотезы, так и вероятность наступления события A при осуществлении какой-либо гипотезы. Эта формула справедлива в том случае, когда имеет место разбиение всего пространства событий на несколько разнородных областей, причем, вероятность события A зависит от того, в какую область оно «попадет». Например, в экономике – это разбиение страны на регионы разного размера и разных условий, когда известна доля каждого региона и вероятность какого-либо параметра в этом регионе (например, процент безработных).

Если событие A уже произошло, то имеет место ***формула Байеса****:*

$$P\left(H_i/A\right)=\frac{P(H_i)\cdot P\left(A/H_i\right)}{P(A)}.$$

Формула Байеса позволяет переоценить вероятности гипотез после того, как событие A уже произошло.

Пример 16: В специализированную больницу поступают в среднем 50% больных с заболеванием *K*, 30%—с заболеванием *L*, 20%—с заболеванием *M.*

Вероятность полного излечения болезни K равна 0,7; для болезней L и M эти вероятности соответственно равны 0,8 и 0,9. Какова вероятность того, что больной будет выписан здоровым? Если больной выздоровел, то какова вероятность того, что он страдал заболеванием K?

Решение: Пусть событие A – больной будет выписан здоровым.

Возможны гипотезы: H_1 – в больницу поступил больной с заболеванием K;

H_2 – в больницу поступил больной с заболеванием L;

H_3 – в больницу поступил больной с заболеванием M.

События H_1, H_2, H_3 образуют полную группу попарно несовместных событий, при этом: $P(H_1)=0,5; P(H_2)=0,3; P(H_3)=0,2$. (Для контроля можно найти сумму вероятностей гипотез – она должна равняться единице: $\sum_{i=1}^{n} P(H_i)=0,5+0,3+0,2=1$.)

По условию задачи условные вероятности наступления события A при осуществлении каждой из гипотез соответственно равны $P\left(A/H_1\right)=0,7$, $P\left(A/H_2\right)=0,8$ и $P\left(A/H_3\right)=0,9$. Тогда по формуле полной вероятности имеем

$$P(A)=P(H_1)\cdot P\left(A/H_1\right)+P(H_2)\cdot P\left(A/H_2\right)+P(H_3)\cdot P\left(A/H_3\right)=$$
$$=0,5\cdot 0,7+0,3\cdot 0,8+0,2\cdot 0,9=0,77.$$

Чтобы ответить на вопрос «если больной выздоровел, то какова вероятность того, что он страдал заболеванием K» найдем вероятность гипотезы H_1 при условии, что событие A уже произошло $P\left(H_1/A\right)$ по формуле Байеса

$$P\left(H_1/A\right)=\frac{P(H_1)\cdot P\left(A/H_1\right)}{P(A)}=\frac{0,5\cdot 0,7}{0,77}\approx 0,455.$$

17.8. Повторные независимые испытания. Схема Бернулли

Рассмотрим эксперимент, который является последовательностью n испытаний, проводимых в одних и тех же условиях. Этот эксперимент называется схемой Бернулли, если выполняется следующее:

- Число n испытаний конечно.
- В каждом испытании возможно только два исхода – событие A наступает или событие A не наступает (наступает противоположное ему событие $\overline{A}$).
- Вероятность наступления события A в каждом испытании одинакова.
- Испытания независимы, то есть исход каждого отдельного испытания не зависит от того, что происходило в предыдущих испытаниях.

Введем следующие обозначения:

- p – это вероятность наступления события A в каждом испытании ($p = P(A)$);
- q – это вероятность наступления противоположного события ($q = P(\overline{A}) = 1 - P(A)$);
- n – число испытаний;
- m – число испытаний, в которых наступает событие A;
- $P_n(m)$ – вероятность наступления события A ровно m раз в серии из n испытаний, проводимых по схеме Бернулли.

Эта вероятность может быть вычислена по формуле, называемой ***формулой Бернулли***:

$$P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}.$$

<u>Частные случаи в схеме Бернулли</u>:

1. Событие A наступает в каждом испытании: $P_n(n) = p^n$.
2. Событие A не наступает ни в одном испытании: $P_n(0) = q^n$.
3. Событие A наступает хотя бы в одном испытании: $P_n(m \geq 1) = 1 - q^n$.
4. Событие A наступает не менее m_1 и не более m_2 раз в серии из n независимых испытаний:

$$P_n(m_1 \leq m \leq m_2) = P_n(m_1) + P_n(m_1 + 1) + ... + P_n(m_2).$$

Пример 17: Вероятность удачного выполнения некоторого сложного химического опыта равна $\frac{2}{3}$. Проводится 4 опыта. Какова вероятность того, что удачными будут: а) только 2 из них; б) не менее двух; в) хотя бы один?

Решение: По условию задачи проводится 4 независимых испытания ($n = 4$). Каждое испытание имеет два исхода: опыт будет удачным, опыт будет неудачным. Вероятность удачного опыта в каждом испытании постоянна и равна $p = \frac{2}{3}$. Вероятность того, что опыт будет неудачным равна $q = 1 - p = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$. Таким образом, мы имеем дело со схемой Бернулли. Для нахождения искомых вероятностей применим формулу Бернулли.

а) В этом случае $n = 4, m = 2, p = \frac{2}{3}, q = \frac{1}{3}$.

$$P_4(2) = C_4^2 \cdot p^2 \cdot q^2 = \frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{9} = \frac{8}{27}.$$

б) Искомая вероятность равна

$$P_4(m \geq 2) = P_4(2) + P_4(3) + P_4(4) = \frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{4!}{3! \cdot 1!} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 + \left(\frac{2}{3}\right)^4 =$$

$$\frac{8}{27} + \frac{32}{81} + \frac{16}{81} = \frac{72}{81} \approx 0,889.$$

в) Для нахождения вероятности данного события воспользуемся третьим частным случаем схемы Бернулли

$$P_4(m \geq 1) = 1 - q^4 = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^4 = 1 - \frac{1}{81} = \frac{80}{81} \approx 0,988.$$

При больших значениях n применение формулы Бернулли приводит к громоздким вычислениям, поэтому могут использоваться приближенные формулы. Если число испытаний n велико, а вероятность наступления события A в каждом отдельном испытании мала, причем $n \cdot p \leq 10$, то используется ***формула Пуассона***:

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \text{ где } \lambda = n \cdot p.$$

Пример 18: В аптеку поступило 500 бутылок минеральной воды. Вероятность того, что при перевозке бутылка окажется разбитой, составляет 0,002. Какова вероятность, что будут повреждены: а) три бутылки; б) менее трех бутылок; в) более трех бутылок; г) хотя бы одна бутылка?

Решение: Число $n = 500$ велико, вероятность $p = 0,002 \ll 1$ мала, а произведение $\lambda = n \cdot p = 1 < 10$. Следовательно, применима формула Пуассона.

а) Найдем вероятность того, что будет разбито ровно три бутылки:

$$P_{500}(3) \approx \frac{1^3}{3!} e^{-1} = \frac{0,36788}{6} \approx 0,0613.$$

б) Найдем вероятность того, что будет разбито менее трех бутылок, $m < 3$ означает, что может быть не разбито ни одной бутылки, либо разбита одна бутылка, либо две бутылки. Тогда

$$P_{500}(m < 3) = P_{500}(0) + P_{500}(1) + P_{500}(2) \approx \frac{1^0}{0!} e^{-1} + \frac{1^1}{1!} e^{-1} + \frac{1^2}{2!} e^{-1} = e^{-1} + e^{-1} + \frac{e^{-1}}{2} =$$

$$= \frac{5}{2e} \approx 0,9197.$$

в) Искомая вероятность

$$P_{500}(m > 3) = P_{500}(4) + P_{500}(5) + ... + P_{500}(500)$$

вычисляется довольно громоздко, поэтому воспользуемся понятием противоположного события.

Рассмотрим два события: «разбито не более трех бутылок» и «разбито более трех бутылок». Легко заметить, что эти события противоположные. Тогда

$$P_{500}(m > 3) = 1 - P_{500}(m \leq 3) = 1 - \left(P_{500}(0) + P_{500}(1) + P_{500}(2) + P_{500}(3)\right) =$$

$$= 1 - (0,9197 + 0,0613) = 0,019.$$

г) События «разбита хотя бы одна бутылка» и «не разбито ни одной бутылки» – противоположные. Тогда

$$P_{500}(m \geq 1) = 1 - P_{500}(0) \approx 1 - e^{-1} \approx 1 - 0{,}368 = 0{,}632\,.$$

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

Выберите один или несколько правильных ответов.

1. ДВА СТУДЕНТА СДАЮТ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ. СОБЫТИЯ «ПЕРВЫЙ СТУДЕНТ СДАЛ ЭКЗАМЕН» И «ВТОРОЙ СТУДЕНТ СДАЛ ЭКЗАМЕН» ЯВЛЯЮТСЯ

   1) зависимыми
   2) независимыми
   3) совместными
   4) несовместными

2. НАЙДИТЕ СООТВЕТСТВИЕ МЕЖДУ ВЕРОЯТНОСТЬЮ И СОБЫТИЕМ

   $P(A) = 0$ $\qquad P(B) = 1$ $\qquad 0< P(C) <1$

   1) достоверное
   2) случайное
   3) невозможное

A	*B*	*C*

3. $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ – ФОРМУЛА ВЫЧИСЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТИ СУММЫ ДВУХ

   1) зависимых событий
   2) независимых событий
   3) совместных событий
   4) несовместных событий

4. $P(AB) = P(A) \cdot P\left(B/A\right)$ – ФОРМУЛА ВЫЧИСЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТИ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ДВУХ

   1) зависимых событий
   2) независимых событий
   3) совместных событий
   4) несовместных событий

5. ИСПЫТАНИЕ СОСТОИТ В ПРОВЕДЕНИИ ТРЕХ ОПЫТОВ. СОБЫТИЯ: A_1 – ПЕРВЫЙ ОПЫТ ОКАЖЕТСЯ УДАЧНЫМ, A_2 – ВТОРОЙ ОПЫТ ОКАЖЕТСЯ УДАЧНЫМ, A_3 – ТРЕТИЙ ОПЫТ ОКАЖЕТСЯ

УДАЧНЫМ. ТОГДА СОБЫТИЕ, СОСТОЯЩЕЕ В ТОМ, ЧТО ВСЕ ТРИ ОПЫТА ОКАЖУТСЯ НЕУДАЧНЫМИ ИМЕЕТ ВИД

1) $\overline{A_1} + \overline{A_2} + \overline{A_3}$
2) $\overline{A_1} A_2 A_3 + A_1 \overline{A_2} A_3 + A_1 A_2 \overline{A_3}$
3) $\overline{A_1}\ \overline{A_2}\ \overline{A_3}$
4) $\overline{A_1}\,\overline{A_2} A_3 + A_1 \overline{A_2}\,\overline{A_3} + \overline{A_1} A_2 \overline{A_3}$

§18. Случайные величины

18.1. Понятие случайной величины.

Наряду со случайными событиями одним из основных понятий теории вероятностей является понятие случайной величины.

Случайной величиной называется величина, принимающая в результате испытания некоторое, заранее неизвестное значение, которое может изменяться от испытания к испытанию.

Случайные величины принято обозначать X, Y, Z,..., их возможные значения – $x_1, x_{2,} ..., x_i, ...$

Случайные величины могут классифицироваться следующим образом:

- Величины ***количественные, порядковые*** и ***классификационные.*** Количественные величины называются также ***числовыми.***
- Величины ***одномерные*** и ***многомерные***.
- Величины ***дискретные*** и ***непрерывные*** (для числовых величин).

Определение: ***Дискретной случайной величиной*** называется случайная величина, принимающая отдельные, изолированные друг от друга значения.

Возможные значения дискретной случайной величины образуют ***конечное*** множество (например, X – случайная величина, равная числу очков, выпавшему на верхней грани кубика, возможны 6 различных значений) или ***счетное*** множество (бесконечное множество, элементы которого можно пронумеровать; например, X – случайная величина, равная количеству подбрасываний монеты до первого выпадения герба).

Определение: ***Непрерывной случайной величиной*** называется случайная величина, принимающая любое значение из некоторого конечного или бесконечного промежутка. Количество значений непрерывной случайной величины бесконечно, невозможно перечислить все ее возможные значения.

Так, продолжительность человеческой жизни, рост человека, продолжительность работы прибора, температура воздуха в течение дня являются непрерывными случайными величинами.

18.2. Закон распределения вероятностей дискретной случайной величины

Рассмотрим дискретную случайную величину X, все возможные значения которой x_1, x_2, …, x_n известны. Знание одних только возможных значений случайной величины еще не позволяет полностью ее описать, так как нельзя сказать, как часто следует ожидать их появления. Кроме того, две различные случайные величины могут принимать одни и те же значения. Дискретная случайная величина будет полностью описана с вероятностной точки зрения, если будет указано, какую вероятность имеет каждое из событий, соответствующих значений случайной величины. Поэтому для полного описания случайной величины необходимо знать закон распределения вероятностей случайной величины.

Определение: ***Законом распределения дискретной случайной величины*** называется соответствие между возможными значениями это величины и их вероятностями.

Закон распределения может быть задан тремя способами:

1) *Табличный способ* – в первой строке таблице в порядке возрастания перечисляются возможные значения случайной величины, во второй – их вероятности.

X	x_1	x_2	…	x_i	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_i	…	p_n

В данной таблице p_i – вероятность того, что случайная величина X приняла значение x_i ($x_i = P\left(X = x_i\right)$). Так как все эти события являются несовместными и образуют полную группу, то сумма вероятностей всех значений случайной величины X равна единице: $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Такую таблицу называют ***рядом распределения*** вероятностей дискретной случайной величины.

2) *Графический способ* – по оси абсцисс откладываются возможные значения случайной величины, по оси ординат – их вероятности (рис. 57). Полученные точки соединяются отрезками. Такой график называют ***многоугольником*** или ***полигоном распределения вероятностей***.

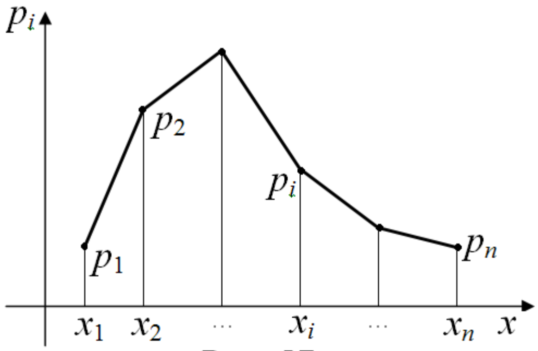


Рис. 57

3) *Аналитический способ* – соответствие между значениями случайной величины и их вероятностями задается с помощью формулы:

$$P(X = x_i) = f(x_i).$$

Пример 1: За медсестрой закреплены трое больных. Вероятность того, что каждому больному в течение часа потребуется внимание сестры, равна 0,4.

Случайная величина X – количество вызовов медсестры в течение часа. Составить ее закон распределения и построить полигон распределения вероятностей.

Решение: Возможные значения случайной величины X: $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=2$, $x_4=3$. Найдем вероятности каждого из этих значений. Вероятность вызова медсестры постоянна и равна при каждом испытании, поэтому можно воспользоваться схемой Бернулли.

$n=3,\ p=0,4,\ q=1-p=0,6$.

$m=0 \Rightarrow P_3(0)=0,6^3=0,216$;

$m=1 \Rightarrow P_3(1)=C_3^1\cdot 0,4\cdot 0,6^2=3\cdot 0,4\cdot 0,6^2=0,432$;

$m=2 \Rightarrow P_3(2)=C_3^2\cdot 0,4^2\cdot 0,6=3\cdot 0,4^2\cdot 0,6=0,288$;

$m=3 \Rightarrow P_3(3)=0,4^3=0,064$.

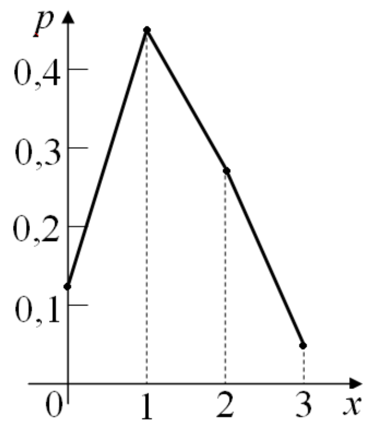


Рис. 58

Тогда закон распределения имеет вид

X	0	1	2	3
P	0,216	0,432	0,288	0,064

По данным значениям случайной величины и соответствующей вероятности построим полигон распределения вероятностей (рис. 58).

18.3. Числовые характеристики дискретной случайной величины

Закон распределения вероятностей содержит полную информацию о случайной величине. Однако при решении многих практических задач нет необходимости характеризовать случайную величину полностью. Зачастую достаточно указать только некоторые характерные черты закона распределения. В теории вероятностей для общей характеристики случайной величины используются показатели, которые носят название ***числовых характеристик*** случайной величины. О каждой случайной величине необходимо прежде всего знать ее центр распределения $M(X)$, около которого группируются возможные значения случайной величины, а также число $D(X)$, характеризующее разброс этих значений относительно центра.

<u>Определение:</u> ***Математическим ожиданием*** дискретной случайной величины называется сумма произведений всех возможных значений случайной величины на их вероятности:

$$M\left(X\right)=x_1\cdot p_1+x_2\cdot p_2+...+x_n\cdot p_n=\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot p_i\ .$$

Математическое ожидание характеризует *центр распределения*, оно приближенно равно среднему арифметическому всех возможных значений случайной величины.

<u>Свойства математического ожидания:</u>

1. Если все значения случайной величины X принадлежат промежутку $[a; b]$, то математическое ожидание не может быть меньше a и больше b.
2. Математическое ожидание постоянной равно самой постоянной:

$$M(C)=C.$$

3. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания:
$$M(CX)=C\cdot M(X).$$
4. Математическое ожидание суммы или разности двух случайных величин равно сумме или разности их математических ожиданий:
$$M(X\pm Y)=M(X)\pm M(Y).$$
5. Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий:
$$M(XY)=M(X)M(Y).$$

<u>Замечание</u>: Две случайные величины называются ***независимыми,*** если вероятности, с которыми каждая из них принимает свои значения, не зависят от того, какое значение приняла другая величина.

6. Математическое ожидание отклонения равно нулю: $M(X-M(X))=0$.

<u>Замечание</u>: ***Отклонением*** случайной величины X от ее математического ожидания называется разность между случайной величиной X и ее математическим ожиданием.

Только одно математическое ожидание не может в достаточной степени характеризовать случайную величину. Легко указать такие случайные величины, которые имеют одинаковые математические ожидания, но различные возможные значения, причем у одной из них возможные значения могут располагаться вблизи математического ожидания, а у другой – далеко. Таким образом, зная лишь математическое ожидание случайной величины, еще нельзя судить ни о том, какие возможные значения она может принимать, ни о том, как они рассеяны вокруг математического ожидания. Поэтому в качестве характеристики, показывающей *степень рассеяния значений* случайной величины относительно центра, рассматривается *дисперсия* случайной величины.

<u>Определение:</u> ***Дисперсией случайной величины*** называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$D(X)=M\left(\left(X-M(X)\right)^2\right).$$

При решении практических задач вычисление дисперсии удобно производить по формуле:

$$D(X)=M\left(X^2\right)-\left(M(X)\right)^2,$$

где $M\left(X^2\right)=x_1^{\,2}\cdot p_1+x_2^{\,2}\cdot p_2+\ldots+x_n^{\,2}\cdot p_n=\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}\cdot p_i$.

<u>Свойства дисперсии:</u>

1. Дисперсия всегда неотрицательна: $D(X)\ge 0$.
2. Дисперсия постоянной равна нулю: $D(C)=0$.

3. Постоянный множитель может быть вынесен за знак дисперсии, при этом его необходимо возвести в квадрат: $D(CX) = C^2 D(X)$.
4. Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме их дисперсий: $D(X+Y) = D(X) + D(Y)$.
5. Дисперсия разности двух независимых случайных величин равна сумме их дисперсий: $D(X-Y) = D(X) + D(Y)$.
6. Дисперсия суммы случайной величины X и постоянной величины равна дисперсии случайной величины X: $D(X+C) = D(X)$.

Недостатком дисперсии является то, что ее размерность равна размерности квадрата случайной величины. В тех случаях, когда нужно иметь числовую характеристику рассеяния возможных значений в той же размерности, что и сама случайная величина, используют среднее квадратическое отклонение.

Определение: ***Средним квадратическим отклонением*** случайной величины X называют корень квадратный из ее дисперсии

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Пример 1: Дан закон распределения дискретной случайной величины:

x_i	0	1	3	5	10
p_i	0,85	0,08	0,04	0,02	0,01

Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

Решение: Воспользуемся формулой для вычисления математического ожидания:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = 0 \cdot 0{,}85 + 1 \cdot 0{,}08 + 3 \cdot 0{,}04 + 5 \cdot 0{,}02 + 10 \cdot 0{,}01 = 0{,}4.$$

Для нахождения дисперсии воспользуемся формулой $D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$. Для этого необходимо сначала вычислить $M(X^2)$:

$$M(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i = 0^2 \cdot 0{,}85 + 1^2 \cdot 0{,}08 + 3^2 \cdot 0{,}04 + 5^2 \cdot 0{,}02 + 10^2 \cdot 0{,}01 = 1{,}94.$$

Тогда дисперсия случайной величины равна

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = 1{,}94 - 0{,}4^2 = 1{,}78.$$

Следовательно, среднее квадратическое отклонение

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} \approx 1{,}33.$$

Ответ: $M(X) = 0{,}4; D(X) = 1{,}78; \sigma(X) \approx 1{,}33$.

18.4. Функция распределения вероятностей

До сих пор в качестве исчерпывающего описания дискретной случайной величины рассматривался закон ее распределения, представляющий собой ряд распределения. Однако такое описание случайной величины X не универсально. Так, оно не применимо для непрерывной случайной величины, так как, во-первых, нельзя перечислить все бесконечное несчетное множество ее значений; во-вторых, вероятности отдельно взятого значения непрерывной случайной величины равны нулю.

Для описания закона распределения случайной величины X возможен и другой подход. В этом случае рассматриваются не вероятности событий $X = x$ для разных x, а вероятности события $X < x$, где x – текущая переменная. Под выражением $X < x$ понимается событие «случайная величина X примет значение меньшее, чем x».

<u>Определение:</u> ***Функцией распределения вероятностей случайной величины*** X называется функция $F(x)$, равная для каждого значения x вероятности $P(X < x)$ того, что случайная величина X примет значение меньшее, чем x:

$$F\left(x\right) = P\left(X < x\right).$$

Функцию распределения $F(x)$ иногда называют ***интегральной функцией распределения*** или ***интегральным законом распределения.***

Функция распределения полностью характеризует случайную величину с вероятностной точки зрения, т.е. является одной из форм закона распределения. Она существует для всех случайных величин, как дискретных, так и непрерывных.

Для дискретной случайной величины X, которая может принимать значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$, интегральная функция распределения будет иметь вид

$$F(x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i).$$

Пример 2: Дан закон распределения дискретной случайной величины:

x_i	1	4	5	7
p_i	0,4	0,1	0,3	0,2

Найти и изобразить графически ее функцию распределения.

Решение: Найдем значения функции распределения при различных значениях x:

1) Если $x \le 1$, то $F(x) = 0$ (в том числе и при $x = 1$ $F(1) = P(X < 1) = 0$).
2) Если $1 < x \le 4$, то $F(x) = P(X < x) = P(X = 1) = 0,4$.
3) Если $4 < x \le 5$, то $F(x) = P(X < x) = P(X = 1$ или $X = 4) =$ $= P(X = 1) + P(X = 4) = 0,4 + 0,1 = 0,5$.
4) Если $5 < x \le 7$, то $F(x) = P(X < x) = P(X = 1,$ или $X = 4,$ или $X = 5) =$ $= P(X = 1) + P(X = 4) + P(X = 5) = 0,4 + 0,1 + 0,3 = 0,8$.
5) Если $x > 7$, то

$F(x) = P(X < x) = P(X = 1) + P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 7) = 0,4 + 0,1 + 0,3 + 0.2 = 1$.

Итак, функция распределения имеет вид (рис. 59):

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\le 1,\\ 0,4 & \text{при} \quad 1<x\le 4,\\ 0,5 & \text{при} \quad 4<x\le 5,\\ 0,8 & \text{при} \quad 5<x\le 7,\\ 1,0 & \text{при} \quad x>7.\end{cases}$$

Интегральная функция распределения дискретной случайной величины есть *разрывная ступенчатая функция*, скачки которой происходят в точках, соответствующих возможным значениям случайной величины и равны вероятностям этих значений.

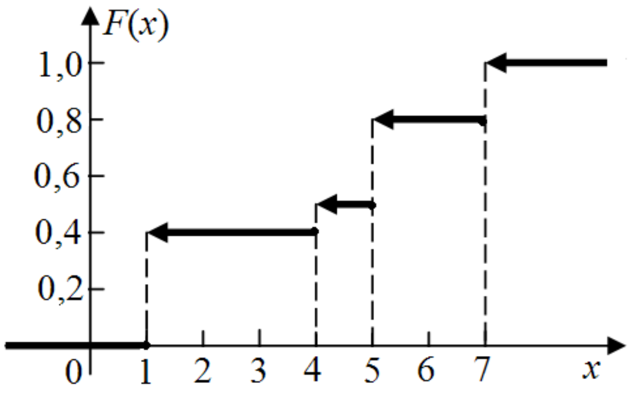


Рис. 59

Определение: Случайную величину X называют ***непрерывной***, если ее функция распределения непрерывна в любой точке и дифференцируема всюду, кроме, может быть, отдельных точек.

Пример 3: Интегральная функция распределения непрерывной случайной величины X задана выражением:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<1;\\ a(x-1)^2, & 1\le x\le 3;\\ 1, & x>3.\end{cases}$$

Найти: а) коэффициент a;

б) построить график функции $F(x)$.

Решение: По определению непрерывной случайной величины функция $F(x)$ должна быть непрерывна, поэтому при $x = 3$ $F(x) = 1$.

Следовательно, $a(3-1)^2=1\Rightarrow a=\dfrac{1}{4}$.

Тогда

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<1;\\ \dfrac{(x-1)^2}{4}, & 1\le x\le 3;\\ 1, & x>3.\end{cases}$$

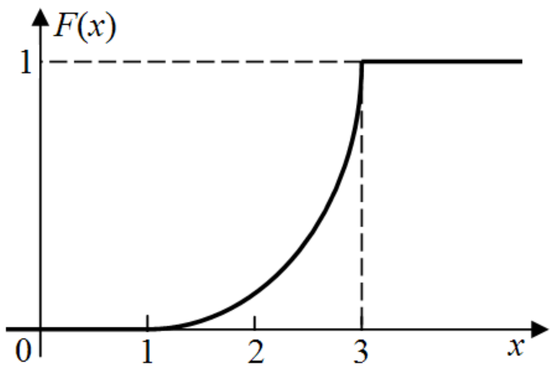


Рис. 60

График функции представлен на рисунке 60.

Свойства функции распределения вероятностей:

1. Поскольку функция распределения равна вероятностей, ее значение находится в промежутке от 0 до 1: $0\le F(x)\le 1$.

2. Функция распределения вероятностей является *неубывающей*, т.е. если $x_1 < x_2$, то $F(x_1) \le F(x_2)$.
3. Вероятность попадания случайной величины X в интервал $[a; b)$ равна разности значений функции распределения в правом и левом концах интервала:
$$P(a \le X < b) = F(b) - F(a).$$
4. Если все значения случайной величины X принадлежат отрезку $[a; b]$, то значение функции распределения равно нулю при $x \le a$ и равно единице при $x > b$.
5. Если все возможные значения непрерывной случайной величины X принадлежат всей числовой оси, то справедливы следующие предельные соотношения:
$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = F(-\infty) = 0 \text{ и } \lim_{x\to+\infty} F(x) = F(+\infty) = 1.$$
6. Вероятность того, что непрерывная случайная величина примет конкретное значение a, равна нулю: $P(X = a) = 0$.
7. Для непрерывной случайной величины вероятности попадания в открытый, закрытый и полузакрытый числовые промежутки равны между собой: $P(a < X < b) = P(a \le X < b) = P(a < X \le b) = P(a \le X \le b)$.

Пример 4: Функция распределения случайной величины X имеет вид:
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \dfrac{x}{2}, & 0 < x \le 2; \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что случайная величина примет значение: а) в интервале $[1; 3)$; б) не менее $\frac{1}{3}$.

Решение: а) По свойству 3 получим: $P(1 \le X < 3) = F(3) - F(1) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

б) По свойству 3 и 5 получим:
$$P\left(X \ge \frac{1}{3}\right) = P\left(\frac{1}{3} \le X < +\infty\right) = F(+\infty) - F\left(\frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{5}{6}.$$

18.5. Плотность распределения вероятностей

Непрерывная случайная величина может быть задана не только с помощью функции распределения вероятностей, но и с помощью плотности распределения вероятностей.

Определение: ***Плотностью распределения вероятностей*** непрерывной случайной величины называется производная от функции распределения вероятностей:
$$f(x) = F'(x).$$

Плотность распределения вероятностей называют также ***законом распределения непрерывной случайной величины*** или дифференциальной функцией распределения.

Кривую $y = f(x)$, изображающую плотность распределения вероятностей случайной величины, называют ***кривой распределения*** (рис.61).

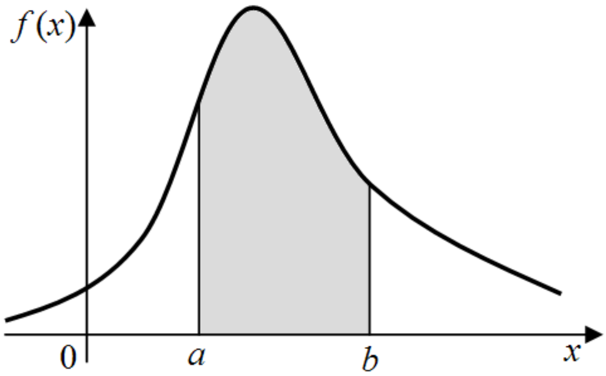


Рис. 61

<u>Свойства плотности распределения вероятностей:</u>

1. Значение плотности распределения вероятностей неотрицательно, так она является производной от неубывающей функции:
$$f(x) \geq 0.$$
2. Вероятность попадания значений случайной величины в интервал (a; b) может быть найдена по формуле:
$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,dx.$$
Геометрически эта вероятность равна площади заштрихованной криволинейной трапеции (рис. 61).
3. При известной плотности распределения вероятностей функция распределения может быть найдена по формуле:
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt.$$
4. Условие нормировки: несобственный интеграл от плотности вероятности в пределах от –∞ до +∞ равен единице:
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1.$$

Пример 5: Плотность распределения вероятностей случайной величины X задана функцией
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ a(3x - x^2), & 0 \leq x < 3; \\ 0, & x \geq 3. \end{cases}$$

Найти: а) коэффициент a; б) вероятность того, что случайная величина X примет значение на интервале (1; 4); в) интегральную функцию распределения $F(x)$.

Решение:

а) Для нахождения коэффициента a воспользуемся условием нормировки 4:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

В нашем случае в каждом из трех интервалов числовой оси ((–∞; 0), [0, 3), [3, +∞)) плотность вероятности задается разными формулами. Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{3} f(x)\,dx + \int_{3}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} 0\cdot dx + \int_{0}^{3} a(3x - x^2)\,dx + \int_{3}^{+\infty} 0\cdot dx =$$

$$= a\left(\frac{3}{2}x^2\Big|_0^3 - \frac{1}{3}x^3\Big|_0^3\right) = a\left(\frac{3}{2}\cdot 9 - \frac{1}{3}\cdot 27\right) = \frac{9}{2}a.$$

Тогда $\frac{9}{2}a = 1 \Rightarrow a = \frac{2}{9}.$

б) для вычисления вероятности того, что случайная величина X примет значение на интервале (1; 4) воспользуемся свойством 2:

$$P(1 < X < 4) = \int_{1}^{4} f(x)\,dx = \int_{1}^{3} \frac{2}{9}\left(3x - x^2\right)dx + \int_{3}^{4} 0\cdot dx = \frac{2}{9}\left(\frac{3}{2}x^2\Big|_1^3 - \frac{1}{3}x^3\Big|_1^3\right) + 0 =$$

$$\frac{2}{9}\left(\frac{3}{2}\cdot(9-1) - \frac{1}{3}\cdot(27-1)\right) = \frac{2}{9}\cdot\left(12 - \frac{26}{3}\right) = \frac{20}{27}.$$

в) для нахождения функции распределения применим свойство 3:

1. Пусть $x < 0$, тогда

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0.$$

2. Пусть $0 \le x < 3$, тогда

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{3} \frac{2}{9}\left(3t - t^2\right)dt = 0 + \frac{2}{9}\left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right) = \frac{2}{9}\left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right).$$

3. Пусть $x \ge 3$, тогда

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{3} \frac{2}{9}\left(3t - t^2\right)dt + \int_{3}^{+\infty} 0\,dt = 0 + \frac{2}{9}\left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_0^3 + 0 = 1$$

Следовательно,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \frac{1}{3}x^2\left(1 - \frac{2}{9}x\right), & 0 \le x < 3; \\ 1, & x \ge 3. \end{cases}$$

18.6. Числовые характеристики непрерывной случайной величины

Числовые характеристики непрерывной случайной величины имеют тот же смысл, что и у дискретной случайной величины, и обладают теми же свойствами.

Определение: ***Математическим ожиданием непрерывной случайной величины*** X называется несобственный интеграл от произведения ее значений x на плотность распределения вероятностей

$$M\left(X\right)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f\left(x\right)dx.$$

Несобственный интеграл предполагается сходящимся (в противном случае говорят, что математическое ожидание случайной величины не существует).

Математическое ожидание случайной величины всегда имеет ту же размерность, что и значения случайной величины, так как вероятность является безразмерной величиной.

Определение: ***Дисперсией непрерывной случайной величины*** X называется несобственный интеграл от произведения квадрата разности между ее значениями и математическим ожиданием на плотность распределения вероятностей:

$$D\left(X\right)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(X-M\left(X\right)\right)^2 f(x)\,dx.$$

Вычисление дисперсии лучше производить по формуле:

$$D\left(X\right)=M\left(X^2\right)-\left(M\left(X\right)\right)^2,$$

где $M\left(X^2\right)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)\,dx$.

Нетрудно видеть, что дисперсия $D(X)$ имеет размерность квадрата размерности случайной величины X.

Определение: ***Средним квадратическим отклонением*** называется корень квадратный из дисперсии

$$\sigma\left(X\right)=\sqrt{D\left(X\right)}.$$

Пример 6: Случайная величина задана плотностью распределения вероятностей: $f(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x<0\\ 2x, & \text{при } 0\le x<1\\ 0, & \text{при } x\ge 1\end{cases}$. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X.

Решение: Найдем математическое ожидание случайной величины X по определению:

$$M\left(X\right)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f\left(x\right)dx=\int\limits_{-\infty}^{0}x\cdot 0\,dx+\int\limits_{0}^{1}x\cdot 2x\,dx+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x\cdot 0\,dx=0+2\int\limits_{0}^{1}x^2\,dx+0=$$

$$=\frac{2}{3}x^3\Big|_0^1=\frac{2}{3}\left(1-0\right)=\frac{2}{3}.$$

Вычислим дисперсию случайной величины. Для этого сначала найдем $M(X^2)$:

$$M\left(X^2\right)=\int_{-\infty}^{0} x^2\cdot 0\,dx+\int_{0}^{1} x^2\cdot 2x\,dx+\int_{1}^{+\infty} x^2\cdot 0\,dx=2\int_{0}^{1} x^3\,dx=\frac{1}{2}x^4\Big|_0^1=\frac{1}{2}.$$

Тогда дисперсия

$$D(X)=M\left(X^2\right)-\left(M(X)\right)^2=\frac{1}{2}-\frac{4}{9}=\frac{1}{18}.$$

Следовательно, среднее квадратическое отклонение равно

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{\frac{1}{18}}=\frac{\sqrt{2}}{6}.$$

18.7. Нормальное распределение

В теории вероятностей нормальный закон распределения имеет фундаментальное значение.

Определение: Закон распределения вероятностей непрерывной случайной величины X называют ***нормальным***, если плотность вероятности определяется формулой:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

где a – математическое ожидание, σ – среднее квадратическое отклонение ($\sigma > 0$).

Нормальное распределение зависит от двух параметров a и σ, и обозначается $N(x, a, \sigma)$.

График плотности распределения вероятностей приведен на рисунке 62. Его называют *нормальной кривой распределения* или *кривой Гаусса*.

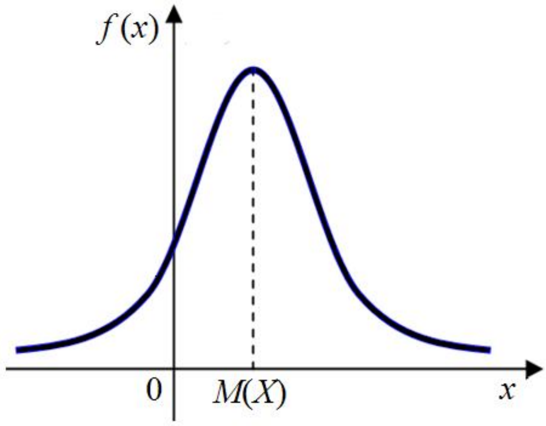


Рис. 62

Определение: Нормальное распределение с математическим ожиданием, равным 0, и среднее квадратическим отклонением, равным 1, называется ***нормированным*** или ***стандартным*** и обозначается $N(x, 0, 1)$.

Функция $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ называется плотностью вероятности нормированного нормального распределения.

График плотности распределения вероятностей нормированной нормальной случайной величины приведен на рисунке 63.

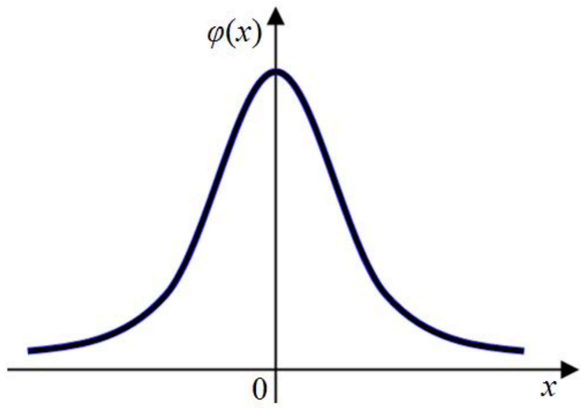


Рис. 63

Формула для нахождения вероятности попадания нормально распределенной случайной величины в заданный интервал:

$$P(x_1 < X < x_2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \Phi\left(\frac{x_2 - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - a}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ – функция Лапласа.

Значения функции $\Phi(z)$ представлены в таблице приложения 4. Для применения этой таблицы нужно знать **свойства функции Лапласа**:

1. Функция $\Phi(z)$ является нечетной, т.е. $\Phi(-z) = -\Phi(z)$.
2. Функция $\Phi(z)$ монотонно возрастающая, причем при $x \to \infty$ $\Phi(z) \to 0,5$
3. При $x > 5$ $\Phi(z) \approx 0,5$.

Пример 7: Случайная величина X распределена нормально. Известно, что $M(X) = 7$, $D(X) = 0,25$. Найти вероятность попадания величины X в интервал (6,4; 8) и в интервал (6,2; 7,4).

Решение: Для нахождения вероятности попадания случайной величины в заданный интервал найдем параметры a и σ:

$$M(X) = 7 \Rightarrow a = 7;\ D(X) = 0,25 \Rightarrow \sigma = \sqrt{0,25} = 0,5.$$

Воспользуемся формулой

$$P(x_1 < X < x_2) = \Phi\left(\frac{x_2 - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - a}{\sigma}\right).$$

Следовательно,

$$P(6,4 < X < 8) = \Phi\left(\frac{8-7}{0,5}\right) - \Phi\left(\frac{6,4-7}{0,5}\right) = \Phi(2) - \Phi(-1,2) =$$
$$= 0,4772 + 0,3849 = 0,8621.$$

$$P(6,2 < X < 7,4) = \Phi\left(\frac{7,4-7}{0,5}\right) - \Phi\left(\frac{6,2-7}{0,5}\right) = \Phi(0,8) - \Phi(-1,6) =$$
$$= 0,2881 + 0,4452 = 0,7333.$$

Ответ: $P(6,4 < X < 8) = 0,8621$; $P(6,2 < X < 7,4) = 0,7333$.

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

Выберите правильный ответ.

1. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ ДИСКРЕТНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ ВЫЧИСЛЯЕТСЯ ПО ФОРМУЛЕ

1) $\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$

2) $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i$

3) $\int_{-\infty}^{+\infty} x\, p(x)\, dx$

4) $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, p(x)\, dx$

2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ НЕПРЕРЫВНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ ВЫЧИСЛЯЕТСЯ ПО ФОРМУЛЕ

1) $\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$

2) $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i$

3) $\int_{-\infty}^{+\infty} x\, p(x)\, dx$

4) $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, p(x)\, dx$

3. ДИСПЕРСИЯ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ ВЫЧИСЛЯЕТСЯ ПО ФОРМУЛЕ

1) $M\left(X^2\right)+\left(M\left(X\right)\right)^2$

2) $M\left(X^2\right)-\left(M\left(X\right)\right)^2$

3) $M\left(X^2\right)+\left(M\left(X\right)\right)$

4) $M\left(X^2\right)-\left(M\left(X\right)\right)$

4. НОРМАЛЬНАЯ НЕПРЕРЫВНАЯ СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА x ЗАДАНА ЗАКОНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ: $f(x)=\frac{1}{4\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-10)^2}{32}}$. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ x РАВНО

1) 4

2) 10

3) 16

4) 32

5. НЕПРЕРЫВНАЯ СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА ЗАДАНА ФОРМУЛОЙ

$f(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ Cx^3, & 0\le x\le 2, \\ 0 & x>2. \end{cases}$ КОНСТАНТА C НАХОДИТСЯ ПО ФОРМУЛЕ

1) $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx=1$

2) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$

3) $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx=1$

4) $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx=1$

Ответы на тестовые задания

Тестовые задания по темам	Номер задания				
	1	**2**	**3**	**4**	**5**
«Матрицы»	2	3412	234	23	3
«Определители»	3	24	124	1	-
«Невырожденная матрица»	23	2	3	3	134
«Системы линейных уравнений»	2	13	3	14	4
«Основные задачи аналитической геометрии»	3	4	1	2	3
«Кривые второго порядка»	2	342	2	1	3
«Прямая и плоскость в пространстве»	1	2	4	4	5
«Функция»	3	2	3	1	4
«Предел функции»	2	3	2	1	3
«Производная функции»	1	2	1	2	2
«Исследование функции»	1	4	3	2	1
«Функция нескольких переменных»	3	3	1	2	4
«Неопределенный интеграл»	2	3	2	2	23
«Определенный интеграл»	3	1	4	4	3
«Дифференциальные уравнения»	3	2	1	2	1
«Основы комбинаторики»	2	3	1	3	2
«Введение в теорию вероятностей»	23	312	3	1	3
«Случайные величины»	1	3	2	1	2

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

ОСНОВНАЯ:

1. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: (в 2 ч.) Ч.1 / Дмитрий Письменный.- 6-е изд. – М.:Айрис-пресс, 2010. – 288 с.
2. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: (в 2 ч.) Ч.2 / Дмитрий Письменный. –6-е изд. – М.:Айрис-пресс, 2010. – 256 с.
3. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебное пособие для вузов / В.Е. Гмурман. – 10-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2010. – 479 с.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ:

1. Сборник задач по высшей математике. 1 курс / К.Н. Лунгу, Д.Т. Письменный, С.Н. Федин, Ю.А. Шевченко. – 7-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2011. – 576 с.
2. Сборник задач по высшей математике. 2 курс / К.Н. Лунгу, Д.Т. Письменный, С.Н. Федин, Ю.А. Шевченко. – 7-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2011. – 592 с.
3. Высшая математика для экономистов: Практикум для студентов вузов, обучающихся по экономическим специальностям / под ред. Проф. Н.Ш.Кремера. – 2-е изд., перераб. И доп. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2008. – 479 с.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Таблица производных.

1. $(C)' = 0$, где $C = \text{const}$.
2. $(x^n)' = nx^{n-1}$, где $n \in R$;

   $(x)' = 1,\ (\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$,
3. $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$.
4. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$,

   где $a > 0$ и $a \neq 1$.
5. $(e^x)' = e^x$.
6. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$,

   где $a > 0$ и $a \neq 1$.
7. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.
8. $(\sin x)' = \cos x$.
9. $(\cos x)' = -\sin x$.
10. $(\mathrm{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.
11. $(\mathrm{ctg}\, x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.
12. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
14. $(\mathrm{arctg}\, x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
15. $(\mathrm{arcctg}\, x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

Основные правила дифференцирования.

Пусть $u = u(x),\ v = v(x)$, тогда справедливо:

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$
2. $(u \cdot v)' = u'\, v + u\, v'$
3. $(C\, u)' = C \cdot u'$
4. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - u\, v'}{v^2}$
5. Для сложной функции: $\left.\begin{array}{l} y = y(u) \\ u = u(x) \end{array}\right\} \Rightarrow y = y\big(u(x)\big) \Rightarrow y'(x) = y'_u(u) \cdot u'(x)$

Приложение 2

Свойства неопределенного интеграла.

1. Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

2. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению: $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$.

3. Неопределенный интеграл от некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной C:

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

4. Неопределенный интеграл от суммы (разности) двух функций равен сумме (разности) неопределенных интегралов от этих функций:

$$\int \left(f(x) \pm g(x)\right)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

5. Постоянный множитель может быть вынесен за знак неопределенного интеграла:

$$\int k f(x)dx = k\int f(x)dx.$$

Таблица основных неопределенных интегралов.

1. $\int dx = x + C$
2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$
4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
5. $\int e^x dx = e^x + C$
6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
7. $\int \cos x dx = \sin x + C$
8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
10. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C$
11. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C$
12. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$
13. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$
14. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$
15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C$

Комплексные числа

Решение многих задач математики сводится к решению алгебраических уравнений. Поэтому естественно стремление сделать эти уравнения разрешимыми, что в свою очередь приводит к расширению понятия числа.

Рассмотрим квадратные уравнения, которые не имеют действительных корней. Простейшим из них является уравнение $x^2+1=0$. Чтобы решить это уравнение необходимо расширить множество действительных чисел, добавив к нему новые числа. Эти новые числа образуют множество, которое называют *множеством комплексных чисел.*

Тогда уравнение $x^2+1=0$ должно иметь решение. Найдем его:

$$x^2=-1 \Rightarrow x=\pm\sqrt{-1}=\pm i.$$

Число i называют *мнимой единицей.*

Определение: ***Комплексными числами*** называют выражения вида $a+bi$, где a и b – действительные числа, i – мнимая единица (такое комплексное число, что $i^2=-1$).

Число a называется *действительной частью* числа $a+bi$, а число b – его мнимой частью.

Рассмотрим решение простейшего квадратного уравнения $x^2=a$.

На множестве комплексных чисел это уравнение всегда имеет корень:

а) имеет один корень $x = 0$, если $a = 0$;

б) имеет два действительных корня $x_{1,2}=\pm\sqrt{a}$, если $a > 0$;

в) имеет два комплексных корня $x_{1,2}=\pm\sqrt{|a|}\,i$, если $a < 0$.

Рассмотрим решение квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$, где a, b и c – действительные числа. Это уравнение имеет корни, которые находятся по известной формуле

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Случаи, когда $D=b^2-4ac\ge 0$, были рассмотрены в школьном курсе математики. Если $D<0$, то уравнение не имеет действительных корней, его корни будут комплексными.

Пример 1: Решить уравнение а) $x^2+9=0$; б) $x^2-6x+25=0$.

Решение:

а) $x^2+9=0$. Перепишем уравнение в виде $x^2=-9$.

Данное уравнение является простейшим, поэтому корни уравнения равны $x_{1,2}=\pm\sqrt{-9} \Rightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{9\cdot(-1)}=\pm\sqrt{9}\cdot\sqrt{-1}=\pm 3i$.

б) $x^2-6x+25=0$. По формуле корней квадратного уравнения имеем:

$$x_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{(-6)^2-4\cdot 1\cdot 25}}{2\cdot 1}=\frac{6\pm\sqrt{36-100}}{2}=\frac{6\pm\sqrt{-64}}{2}=\frac{6\pm 8i}{2}=\frac{2(3\pm 4i)}{2}=3\pm 4i$$

Приложение 4

Таблица значений функции Лапласа $\Phi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^z e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$

z	Φ(z)	z	Φ(z)	z	Φ(z)	z	Φ(z)
0	0	0,35	0,1368	0,70	0,2580	1,05	0,3531
0,01	0,0040	0,36	0,1406	0,71	0,2612	1,06	0,3554
0,02	0,0080	0,37	0,1443	0,72	0,2642	1,07	0,3577
0,03	0,0120	0,38	0,1480	0,73	0,2673	1,08	0,3599
0,04	0,0160	0,39	0,1517	0,74	0,2704	1,09	0,3621
0,05	0,0199	0,40	0,1554	0,75	0,2734	1,10	0,3643
0,06	0,0239	0,41	0,1591	0,76	0,2764	1,11	0,3665
0,07	0,0279	0,42	0,1628	0,77	0,2794	1,12	0,3686
0,08	0,0319	0,43	0,1664	0,78	0,2823	1,13	0,3708
0,09	0,0359	0,44	0,1700	0,79	0,2852	1,14	0,3729
0,10	0,0398	0,45	0,1736	0,80	0,2881	1,15	0,3749
0,11	0,0438	0,46	0,1772	0,81	0,2910	1,16	0,3770
0,12	0,0478	0,47	0,1808	0,82	0,2939	1,17	0,3790
0,13	0,0517	0,48	0,1844	0,83	0,2967	1,18	0,3810
0,14	0,0557	0,49	0,1879	0,84	0,2996	1,19	0,3830
0,15	0,0596	0,50	0,1915	0,85	0,3023	1,20	0,3849
0,16	0,0636	0,51	0,1950	0,86	0,3051	1,21	0,3869
0,17	0,0675	0,52	0,1985	0,87	0,3079	1,22	0,3888
0,18	0,0714	0,53	0,2019	0,88	0,3106	1,23	0,3907
0,19	0,0754	0,54	0,2054	0,89	0,3133	1,24	0,3925
0,20	0,0793	0,55	0,2088	0,90	0,3159	1,25	0,3944
0,21	0,0832	0,56	0,2123	0,91	0,3186	1,26	0,3962
0,22	0,0871	0,57	0,2157	0,92	0,3212	1,27	0,3980
0,23	0,0910	0,58	0,2190	0,93	0,3238	1,28	0,3997
0,24	0,0948	0,59	0,2224	0,94	0,3264	1,29	0,4015
0,25	0,0987	0,60	0,2258	0,95	0,3289	1,30	0,4032
0,26	0,1026	0,61	0,2291	0,96	0,3315	1,31	0,4049
0,27	0,1064	0,62	0,2324	0,97	0,3340	1,32	0,4066
0,28	0,1103	0,63	0,2357	0,98	0,3365	1,33	0,4082
0,29	0,1141	0,64	0,2389	0,99	0,3389	1,34	0,4099
0,30	0,1179	0,65	0,2422	1,00	0,3413	1,35	0,4115
0,31	0,1217	0,66	0,2454	1,01	0,3438	1,36	0,4131
0,32	0,1255	0,67	0,2486	1,02	0,3461	1,37	0,4147
0,33	0,1293	0,68	0,2518	1,03	0,3485	1,38	0,4162
0,34	0,1331	0,69	0,2549	1,04	0,3508	1,39	0,4177

z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$
1,40	0,4192	1,74	0,4591	2,16	0,4846	2,84	0,4977
1,41	0,4207	1,75	0,4599	2,18	0,4854	2,86	0,4979
1,42	0,4222	1,76	0,4608	2,20	0,4861	2,88	0,4980
1,43	0,4236	1,77	0,4616	2,22	0,4868	2,90	0,4981
1,44	0,4251	1,78	0,4625	2,24	0,4875	2,92	0,4983
1,45	0,4265	1,79	0,4633	2,26	0,4881	2,94	0,4984
1,46	0,4279	1,80	0,4641	2,28	0,4887	2,96	0,4985
1,47	0,4292	1,81	0,4649	2,30	0,4893	2,98	0,4986
1,48	0,4306	1,82	0,4656	2,32	0,4898	3,00	0,4987
1,49	0,4319	1,83	0,4664	2,34	0,4904	3,05	0,4989
1,50	0,4332	1,84	0,4671	2,36	0,4909	3,10	0,4990
1,51	0,4345	1,85	0,4678	2,38	0,4913	3,15	0,4992
1,52	0,4357	1,86	0,4686	2,40	0,4918	3,20	0,4993
1,53	0,4370	1,87	0,4693	2,42	0,4922	3,25	0,4994
1,54	0,4382	1,88	0,4700	2,44	0,4927	3,30	0,4995
1,55	0,4394	1,89	0,4706	2,46	0,4931	3,35	0,4996
1,56	0,4406	1,90	0,4713	2,48	0,4934	3,40	0,4997
1,57	0,4418	1,91	0,4719	2,50	0,4938	3,45	0,4997
1,58	0,4430	1,92	0,4726	2,52	0,4941	3,50	0,4998
1,59	0,4441	1,93	0,4732	2,54	0,4945	3,55	0,4998
1,60	0,4452	1,94	0,4738	2,56	0,4948	3,60	0,4998
1,61	0,4463	1,95	0,4744	2,58	0,4951	3,65	0,49987
1,62	0,4474	1,96	0,4750	2,60	0,4953	3,70	0,49989
1,63	0,4485	1,97	0,4756	2,62	0,4956	3,75	0,49991
1,64	0,4495	1,98	0,4762	2,64	0,4959	3,80	0,49993
1,65	0,4505	1,99	0,4767	2,66	0,4961	3,85	0,49994
1,66	0,4515	2,00	0,4773	2,68	0,4963	3,90	0,49995
1,67	0,4525	2,02	0,4783	2,70	0,4965	3,95	0,49996
1,68	0,4535	2,04	0,4793	2,72	0,4967	4,00	0,499968
1,69	0,4545	2,06	0,4803	2,74	0,4969	4,50	0,499997
1,70	0,4554	2,08	0,4812	2,76	0,4971	5,00	0,499997
1,71	0,4564	2,10	0,4821	2,78	0,4973	>5	0,5
1,72	0,4573	2,12	0,4830	2,80	0,4974		
1,73	0,4582	2,14	0,4838	2,82	0,4976		

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Елена Владимировна Черникова
Аржаник Марина Борисовна
Римма Ахматовна Манешева

МАТЕМАТИКА
(теоретический курс)

Учебное пособие

Редакционно-издательский отдел СибГМУ
634050, г. Томск, пр. Ленина, 107
тел. 8(382-2) 51-41-53
факс. 8(382-2) 51-53-15
E-mail: bulletin@bulletin.tomsk.ru

Подписано в печать 10.06.2014 г.
Формат 60x84 $\frac{1}{16}$. Бумага офсетная.
Печать ризограф. Гарнитура «Times». Печ. лист 8,9
Тираж 100 экз. Заказ №

Отпечатано в лаборатории оперативной полиграфии СибГМУ
634050, Томск, ул. Московский тракт, 2