

**МИНИСТЕРСТВО ЗДРАВООХРАНЕНИЯ РОССИЙСКОЙ  
ФЕДЕРАЦИИ**

**СИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ МЕДИЦИНСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ**

**Кафедра физики**

**СБОРНИК ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ ПО  
ВРАЩАТЕЛЬНОЙ ДИНАМИКЕ**

**Томск 2000**

Пособие подготовлено на основе государственной программы обучения студентов в высших медицинских учебных заведениях и рекомендовано Методической комиссией медико-биологического факультета СГМУ для использования в учебном процессе.

Составитель: профессор Кистенев Юрий Владимирович

Рецензент: доцент Гейко Павел Пантелеевич

В данном цикле лабораторных работ исследуются частные случаи движения тел, закрепленных на оси вращения, в частности, закономерности их колебательно-вращательного движения, столкновения тел. Данные закономерности проявляются во многих ситуациях, связанных с процессом жизнедеятельности человека, а также задачах эргометрии. Включенные в сборник работы соответствуют программе по физике на медико-биологическом факультете, однако за исключением работы, связанной с анализом движения обратного маятника, могут быть также использованы на лечебных факультетах.

## Содержание

Изучение закономерностей центрального удара .....	3
Изучение свободных колебаний и измерение ускорения свободного падения .....	7
Измерение ускорения свободного падения с помощью математического маятника .....	15

## Лабораторная работа

### ИЗУЧЕНИЕ ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ ЦЕНТРАЛЬНОГО УДАРА

#### ЦЕЛИ РАБОТЫ:

- Проверка закона сохранения импульса.
- Определение величины потери энергии и коэффициента восстановления для прямого центрального удара шаров.

#### ТЕОРИЯ

Удар - это совокупность явлений, возникающих при столкновении твердых тел или твердого тела с движущейся жидкостью (гидравлический удар), газом (действие ударной волны). Время удара составляет величину порядка  $10^{-4}$  -  $10^{-5}$  с, то есть очень мало, и возникающие в местах контакта ударные силы очень велики (среднее давление в области контакта достигает  $10^5$  Па). Действие ударных сил приводит к значительному изменению скорости соударяющихся тел в процессе их столкновения. Следствием удара могут также быть остаточные деформации, нагревание тел, изменение их механических свойств (в частности, упрочнение), химические и полиморфные превращения. Примером последнего является изменение структуры графита до структуры алмаза под действием ударной волны. При достаточно больших скоростях соударения, превышающих некоторое критическое значение происходит разрушение тел в месте удара. Для металлов, например, диапазон критических значений лежит в области  $15$  м/с (мель) -  $150$  м/с (высококачественная сталь).

При ударе кинетическая энергия тел на короткое время преобразуется в энергию деформации. Деформация тел во время удара сопровождается возникновением сил упругости, которые значительно больше всех внешних сил. Это позволяет пренебречь влиянием внешних сил на соударение, т.е. считать систему соударяющихся тел замкнутой и применять к ней закон сохранения импульса

$$M_1 \vec{V}_1 + M_2 \vec{V}_2 = M_1 \vec{U}_1 + M_2 \vec{U}_2 \quad (1)$$

здесь  $M_1$  и  $M_2$  - масса шаров, двигавшихся со скоростями  $V_1$  и  $V_2$  до удара и  $U_1$  и  $U_2$  - после удара.

Применение законов сохранения позволяет найти закономерности удара без решения более сложных уравнений движения шаров в форме второго закона Ньютона.

Ограничимся далее случаем прямого центрального удара - когда траектория движения шаров проходит через их центр масс.

С точки зрения превращения механической энергии соударяющихся тел, различают абсолютно упругий и абсолютно неупругий удар.

Абсолютно упругий удар - это удар, при котором имеет место закон сохранения механической энергии.

В процессе удара различают две фазы. В течение первой фазы удара деформация шаров возрастает за счет убыли кинетической энергии соударяющихся шаров. Силы упругости, действующие на шары, растут с увеличением деформации до тех пор, пока скорости обоих шаров не сравняются. Затем, в течение второй фазы удара, упругие силы расталкивают шары, уменьшая деформацию до тех пор, пока шары не разойдутся. При этом потенциальная энергия упругих сил полностью переходит в кинетическую.

Рассмотрим абсолютно упругий прямой центральный удар двух шаров с массами  $M_1$  и  $M_2$ , двигавшихся со скоростями  $V_1$  и  $V_2$  до удара и  $U_1$  и  $U_2$  - после удара. При этом закон сохранения механической энергии запишется в виде

$$\frac{M_1 V_1^2}{2} + \frac{M_2 V_2^2}{2} = \frac{M_1 U_1^2}{2} + \frac{M_2 U_2^2}{2} \quad (2)$$

Кроме того в силу замкнутости системы соударяющихся тел будет

выполняться закон сохранения импульса (1).

Законы сохранения (1), (2) позволяют найти скорости шаров после соударения

$$\vec{U}_1 = \frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2} \vec{V}_1 + \frac{2M_2}{M_1 + M_2} \vec{V}_2 \quad (3a)$$

$$\vec{U}_2 = \frac{2M_1}{M_1 + M_2} \vec{V}_1 + \frac{M_2 - M_1}{M_1 + M_2} \vec{V}_2 \quad (3b)$$

Рассмотрим частные случаи (3) при условии, что второй шар до удара покоился ( $V_2=0$ )

а)  $M_1 = M_2$ . Видно, что при этом налетающий (первый) шар после удара остановится, а первоначально покоившийся (второй) шар после удара будет двигаться со скоростью  $V_1$ . В этом случае происходит «обмен» скоростями между шарами.

б)  $M_2 \gg M_1$ . Это условие реализуется, когда шар налетает на массивное неподвижное препятствие. Из (3a) следует, что

$$\vec{U}_1 = -\vec{V}_1$$

т.е. шар отскакивает от препятствия и движется в обратном направлении с той же скоростью, что была у него до удара.

Абсолютно неупругий удар - это удар, при котором шары после столкновения движутся как единое целое. Здесь процесс удара состоит только из одной фазы, когда деформация шаров растет за счет убыли кинетической энергии соударяющихся шаров до тех пор, пока скорости обоих шаров не сравняются.

Поскольку после удара шары имеют остаточную деформацию, часть кинетической энергии соударяющихся шаров необратимо превращается во внутреннюю энергию. В этом случае закон сохранения механической энергии не выполняется, а закон сохранения импульса имеет вид

$$M_1 \vec{V}_1 + M_2 \vec{V}_2 = (M_1 + M_2) \vec{U} \quad (4)$$

где  $\vec{U}$  - скорость шаров после столкновения.

Убыль кинетической энергии при таком ударе:

$$\Delta T = \frac{(M_1 + M_2)U^2}{2} - \frac{M_1 V_1^2}{2} - \frac{M_2 V_2^2}{2} \quad (5)$$

В частном случае, когда второй шар до удара покоился ( $V_2=0$ )

$$M_1 \vec{V}_1 = (M_1 + M_2) \vec{U} \quad (6)$$

и

$$\Delta T = \frac{(M_1 + M_2)U^2}{2} - \frac{M_1 V_1^2}{2} = -\frac{M_1 M_2 V_1^2}{2(M_1 + M_2)} \quad (7)$$

Относительное изменение кинетической энергии в процессе удара равно

$$\frac{|\Delta T|}{T} = \frac{M_2}{M_1 + M_2} \quad (8)$$

Следовательно, при абсолютно неупругом ударе тела о неподвижное препятствие изменение механической энергии определяется соотношением масс сталкивающихся тел.

Из (8) видно, что при  $M_2 \gg M_1$  практически вся кинетическая энергия переходит во внутреннюю энергию тел (уходит на их деформацию). Поэтому, например, наковальня должна быть существенно массивнее молота. При  $M_2 \ll M_1$  кинетическая энергия практически не меняется. Поэтому, например, гвоздь удобнее забивать массивным молотком.

#### Частично неупругий удар.

Большинство реальных соударений является частично неупругими. В этом

случае уменьшения кинетической энергии равно

$$\Delta T = -\frac{M_1 M_2}{2(M_1 + M_2)} (V_1 - V_2)^2 (1 - K^2) \quad (9)$$

где  $K$  - коэффициент восстановления (относительной скорости), равный

$$K = \frac{U_2 - U_1}{V_1 - V_2} \quad (10)$$

Коэффициент восстановления характеризует уменьшение относительной скорости тел при соударениях, а, следовательно, и долю рассеянной при ударе энергии и зависит только от материала тел. Если  $K = 0$ , удар будет абсолютно неупругим. Если  $K = 1$ , удар является абсолютно упругим. Для реальных тел  $0 < K < 1$ . Таким образом,  $K$  характеризует упругие свойства материала.

Из (9) следует, что относительное изменение кинетической энергии в процессе частично неупругого удара при  $V_2 = 0$  равно

$$\frac{|\Delta T|}{T} = \frac{M_1}{M_1 + M_2} (1 - K^2) \quad (11)$$

Отсюда можно получить формулу для экспериментального определения коэффициента восстановления

$$K = \sqrt{1 - \frac{|\Delta T|}{T} \frac{M_1 + M_2}{M_1}} \quad (12)$$

### МЕТОД ПРОВЕДЕНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА

В работе используется баллистический динамометр (рис.1), состоящий из двух шаров подвешенных на нитях одинаковой длины  $L$ . Пусть в начальном состоянии шар массой  $M_1$  отклонен от положения равновесия и удерживается электромагнитом. Введем следующие обозначения: углы равновесного положений шаров равны  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , угол начального отклонения -  $\beta_0$ , а углы максимального отклонения шаров после удара -  $\beta_1, \beta_2$ .

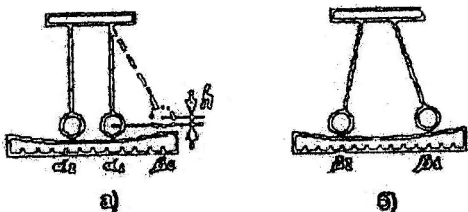


Рис.1. Положение шаров а) до удара б) после удара.

Тогда высоту поднятия  $h$  шара с массой  $M$ , относительно равновесного положения можно определить по формуле

$$h = L - L \cos(\beta_0 - \alpha_1) = L(1 - \cos(\beta_0 - \alpha_1)) \quad (13)$$

Кинетическая энергия первого шара непосредственно перед соударением в силу закона сохранения энергии (в пренебрежении трением) равна

$$T_1 = \frac{M_1 V_1^2}{2} = M_1 g h = M_1 g L [1 - \cos(\beta_0 - \alpha_1)] \quad (14)$$

Аналогично определяются кинетические энергии шаров после удара

$$T_2 = \frac{M_2 U_2^2}{2} = M_2 g L [1 - \cos(\beta_2 - \alpha_2)] \quad (15)$$

$$T_2 = \frac{M_2 U_2^2}{2} = M_2 g L [1 - \cos(\beta_2 - \alpha_2)] \quad (16)$$

Таким образом, изменение энергии шаров при ударе равно

$$\Delta T = T_1 - T_2 \quad (17)$$

Закон сохранения энергии позволяет также найти и импульсы шаров: так импульс первого шара до соударения равен

$$P_1 = M_1 V_1 = M_1 \sqrt{2gh} = \sqrt{2T_1 M_1} \quad (18)$$

Импульсы шаров после удара равны

$$P_1 = M_1 U_1 = \sqrt{2T_1 M_1} = M_1 \sqrt{2g[1 - \cos(\beta_1 - \alpha_1)]} \quad (19)$$

$$P_2 = M_2 U_2 = \sqrt{2T_2 M_2} = M_2 \sqrt{2g[1 - \cos(\beta_2 - \alpha_2)]} \quad (20)$$

Приведенные соотношения позволяют провести проверку закона сохранения импульса и оценить величину переданной энергии для центрального прямого удара шаров.

### ЗАДАНИЕ

1. Определить массу шаров.
2. Измерить длину подвеса шаров -  $L$  (до центра шаров).
3. Измерить углы равновесного положения шаров  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ .
4. Отклонить первый шар и зафиксировать в поднятом состоянии с помощью электромагнита, измерить угол отклонения  $\beta_0$ .
5. Выключить электромагнит.
6. Измерить угол  $\beta_1$  наибольшего отклонения от вертикали второго шара после удара.
7. Повторить удар, измерив при этом угол  $\beta_2$  наибольшего отклонения от вертикали первого шара.
8. Повторить измерения  $\beta_1$  и  $\beta_2$  не менее 5 раз.
9. Оценить потери механической энергии  $\Delta T$  по формуле (17).
10. Определить величину коэффициента восстановления  $K$  по формуле (12). Рассчитать погрешность определения  $K$ , проанализировать источники систематической погрешности измерений.
11. Проверить выполнение закона сохранения импульса из соотношений (18), (19), (20).
12. Данные занести в таблицу.

Таблица

№	$L$ , см	$M_1$ , г	$M_2$ , г	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\beta_0$	$\beta_1$	$\beta_2$
1								
2								
3								
4								
5								

### КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какой удар называется упругим, неупругим, центральным?
2. Чем отличается абсолютно упругий удар от абсолютно неупругого?
3. Как определить скорости тел после абсолютно упругого удара?
4. Как определить скорости тел после абсолютно неупругого удара?
5. Что характеризует коэффициент восстановления?



## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА

### ИЗУЧЕНИЕ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ И ИЗМЕРЕНИЕ УСКОРЕНИЯ СВОБОДНОГО ПАДЕНИЯ

#### ЦЕЛИ РАБОТЫ:

- Изучение свободных колебаний математического и физического маятников.
- Определение ускорения свободного падения.

#### КРАТКАЯ ТЕОРИЯ

**Колебания** - это повторяющиеся во времени процессы.

**Свободные колебания** совершаются за счет первоначально сообщенной энергии при последующем отсутствии внешних воздействий на систему.

Колебания называют **гармоническими**, если смещение тела от положения равновесия  $x(t)$  меняется со временем по гармоническому закону:

$$x(t) = A \cos(\omega t) \quad (1)$$

где  $A$  - максимальное смещение, называемое **амплитудой колебаний**,  $\omega$  - **циклическая частота свободных колебаний** и  $\phi(t) = \omega t$  - **фаза колебаний** (фаза характеризует состояние колебательной системы в момент времени  $t$ ).

При гармонических колебаниях состояния системы повторяются через промежуток времени  $T = 2\pi/\omega$ , называемый **периодом колебаний**. Величина  $\nu = 1/T$ , называемая **частотой колебаний**. Она определяет число колебаний, совершаемых в единицу времени. (2)

Примерами тел, совершающих гармонические колебания, могут служить **физический и математический маятники**.

**Математический маятник** - представляет собой тело массой  $m$ , принимаемое за материальную точку, подвешенное на нерастяжимой и невесомой нити длиной  $l$  (рис. 1).



Рис. 1.

Поскольку математический маятник движется по траектории, являющейся частью окружности, для анализа его движения следует использовать уравнение динамики вращательного движения

$$J\epsilon = M$$

где  $\epsilon$  - угловое ускорение тела,  $M$  - момент сил, действующих на тело,  $J$  - момент инерции тела относительно оси вращения. Это уравнение можно записать в виде

$$J \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = M \quad (3)$$

где  $\alpha$  - угол отклонения маятника от равновесного положения.

Момент возвращающей силы создается тангенциальной компонентой силы тяжести  $F_t$  и при малых углах отклонения  $\alpha$  равен (см. рис. 1)

$$M = F_t l = -mgl \sin(\alpha) \approx -mgl\alpha \quad (4)$$

(знак «-» обусловлен тем, что направление силы противоположно отклонению маятника от положения равновесия). Подставив (4) в (3), получим уравнение гармонических колебаний

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \frac{mgl}{J} \alpha = 0 \quad (5)$$

которое имеет решение

$$\alpha(t) = A \cos(\omega t) \quad (6)$$

где с учетом того, что момент инерции математического маятника  $J = ml^2$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (7)$$

**Физический маятник** - твердое тело, совершающее колебания под действием силы тяжести вокруг горизонтальной оси  $O$  подвеса не проходящей через центр масс  $C$  тела (рис. 2). Движение физического маятника будет также описываться уравнением (5), следовательно частота его колебаний равна

$$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{J}} = \sqrt{\frac{g}{L}} \quad \text{или} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \quad (8)$$

где  $L = J/ml$  - приведенная длина физического маятника.

Из (7) и (8) видно, что, если приведенная длина физического маятника  $L$  равна длине математического маятника  $l$ , то их периоды колебаний одинаковы. Следовательно, приведенная длина физического маятника - это длина такого математического маятника, период колебаний которого совпадает с периодом колебаний данного физического маятника

Точка  $O'$  на продолжении прямой  $OC$ , отстоящая от оси подвеса на расстоянии  $L$ , называется **центром качаний физического маятника** (см. рис. 2). Точка подвеса  $O$  и центр качаний  $O'$  обладают свойством взаимозаменяемости: если ось подвеса сделать проходящей через центр качаний  $O'$ , то точка  $O$  прежней оси подвеса станет новым центром качаний. При этом период колебаний маятника не изменится.

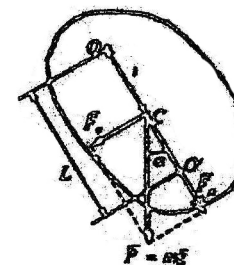


Рис. 2.

# МЕТОД ИЗМЕРЕНИЯ УСКОРЕНИЯ СВОБОДНОГО ПАДЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ ОБОРОТНОГО МАЯТНИКА

Соотношение (8), в принципе, позволяет найти ускорение свободного падения  $g$ . Однако, с высокой точностью можно измерить только период колебаний  $T$  маятника, а величины  $I$  и  $J$  достаточно точно определить не удастся. От этого недостатка свободен метод определения ускорения свободного падения с помощью оборотного маятника, который изображен на Рис.3.

Оборотный маятник состоит из тонкого стального стержня 2, по которому можно перемещать две массивные чечевицы 1 и две легкие опорные призмы 3. Опорные призмы и чечевицы фиксируются на стержне с помощью винтов. Правильное взаимное расположение опорных призм и чечевиц на стержне показано на рисунке. Нанесенные на стержень деления (цена деления 1.0 см) позволяют определять положения призм и чечевиц на стержне.

Маятник может совершать колебания в вертикальной плоскости. Колебания маятника будут гармоническими, если амплитуда колебаний не будет превышать нескольких градусов.

Используя теорему Штейнера, момент инерции физического маятника относительно оси подвеса  $O$  (рис 2) представим в виде

$$J = J_c + ml^2, \quad (9)$$

где  $J_c$  - момент инерции маятника относительно оси, параллельной оси подвеса и проходящей через центр масс  $C$  маятника,  $l$  - расстояние между осью  $O$  и центром масс  $C$ . Подставляя выражение (9) в (8), получим

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_c + ml^2}{mg}} \quad (10)$$

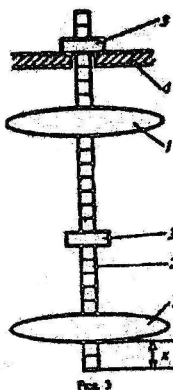


Рис. 3

Обсудим характер зависимости периода колебаний  $T$  от расстояния  $l$ , исходя из соотношения (10). С уменьшением  $l$  момент силы тяжести (4), стремящийся вернуть маятник в равновесное положение, уменьшается, и период колебаний возрастает. Когда ось подвеса совпадает с центром масс, тело не будет колебаться, т.к. находится в положении равновесия. Этому формально соответствует бесконечно большой период колебаний. При очень больших величинах  $l$  период колебаний также неограниченно возрастает.

С учетом того, что произвольной оси подвеса всегда соответствует центр качаний с тем же периодом колебаний, график зависимости периода колебаний от параметра  $l$  имеет вид (Рис.4)

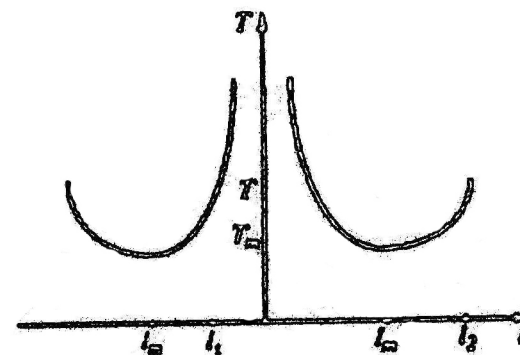


Рис. 4.

Из графика видно, что по каждую сторону от центра масс маятника имеется по две точки подвеса, для которых периоды колебаний маятника совпадают. Найдем такие два положения  $l_1$  и  $l_2$  ( $l_1 \neq l_2$ ) точек подвеса по разные стороны от центра масс (рис 5), чтобы периоды колебаний маятника совпадали.

Как видно из (10), для этого необходимо выполнение равенства

$$\frac{J_c}{ml_1} + l_1 = \frac{J_c}{ml_2} + l_2$$

которое имеет место при

$$l_2 = \frac{J_c}{ml_1}.$$

В этом случае период колебаний маятника равен

$$T(l_1) = 2\pi \sqrt{\left(\frac{J_c}{ml_1} + l_1\right) \frac{1}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{l_1 + l_2}{g}}$$

Следовательно, ускорение свободного падения может быть определено по формуле

$$g = \frac{4\pi^2}{T^2} (l_1 + l_2) \quad (11)$$

Величина  $L = l_1 + l_2$  является приведенной длиной маятника.

Как видно из (11), для нахождения  $g$  достаточно измерить расстояние  $L$  между точками подвеса маятника (опорными ребрами призм) и период колебаний маятника в положении  $l_1$  и в «перевернутом» положении  $l_2$  таким, что  $l_1 \neq l_2$ . При этом периоды колебаний в этих положениях должны совпадать, т.е.  $T(l_1) = T(l_2) = T$ .

## ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ

Чтобы определить ускорение силы тяжести с помощью оборотного маятника, необходимо измерить приведенную длину маятника. Напомним, что, если периоды колебаний физического маятника для двух точек подвеса равны, то расстояние между точками подвеса равно приведенной длине. Таким образом, необходимо подобрать такие положения чечевиц и опорных призм, чтобы периоды колебаний для двух точек подвеса были равны. Можно поступить следующим образом. Опорные призмы и одна из чечевиц остаются неподвижными. Перемещая вторую чечевицу, находят такое ее положение, когда периоды колебаний для двух точек подвеса совпадают.



## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА

### ИЗМЕРЕНИЕ УСКОРЕНИЯ СВОБОДНОГО ПАДЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

#### ЦЕЛИ РАБОТЫ

- Изучение свободных колебаний математического маятника.
- Определение ускорения свободного падения.

#### КРАТКАЯ ТЕОРИЯ

Колебания - это повторяющиеся во времени процессы.

Свободные колебания совершаются за счет первоначально сообщенной энергии при последующем отсутствии внешних воздействий на систему.

Колебания называют гармоническими, если смещение тела от положения равновесия  $x(t)$  меняется со временем по гармоническому закону:

$$x(t) = A \cos(\omega t) \quad (1)$$

где  $A$  - максимальное смещение, называемое амплитудой колебаний,  $\omega$  - циклическая частота свободных колебаний и  $\phi(t) = \omega t$  - фаза колебаний (фаза характеризует состояние колебательной системы в момент времени  $t$ ).

При гармонических колебаниях состояния системы повторяются через промежуток времени  $T = 2\pi/\omega$ , называемый периодом колебаний. Величина

$$\nu = 1/T, \quad (2)$$

называется частотой колебаний. Частота определяет число колебаний, совершаемых в единицу времени.

Примерами тел, совершающих гармонические колебания, могут служить физический и математический маятники.

Математический маятник - представляет собой тело массой  $m$ , принимаемое за материальную точку, подвешенное на нерастяжимой и невесомой нити длиной  $l$  (рис. 1).

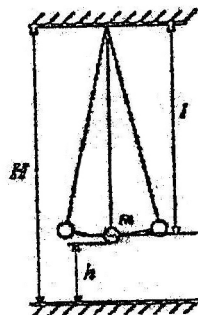


Рис. 1.

Поскольку математический маятник движется по траектории, являющейся частью окружности, для анализа его движения следует использовать уравнение динамики вращательного движения

$$J\varepsilon = M$$

где  $\varepsilon$  - угловое ускорение тела,  $M$  - момент сил, действующих на тело,  $J$  - момент инерции тела относительно оси вращения. Это уравнение можно записать в виде

$$J \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = M \quad (3)$$

где  $\alpha$  - угол отклонения маятника от равновесного положения.

Момент возвращающей силы создается тангенциальной компонентой силы тяжести  $F_t$  и при малых углах отклонения  $\alpha$  равен (см. рис. 1)

$$M = F_t l = -mgl \sin(\alpha) \approx -mgl\alpha \quad (4)$$

(знак «-» обусловлен тем, что направление силы противоположно отклонению маятника от положения равновесия).

Подставив (4) в (3), получим уравнение гармонических колебаний

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \frac{mgl}{J} \alpha = 0, \quad (5)$$

которое имеет решение

$$\alpha(t) = A \cos(\omega t) \quad (6)$$

где с учетом того, что момент инерции математического маятника  $J = ml^2$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (7)$$

Физический маятник - твердое тело, совершающее колебания под действием силы тяжести вокруг горизонтальной оси  $O$  подвеса не проходящей через центр масс  $C$  тела (рис. 2). Движение физического маятника будет также описываться уравнением (5), следовательно, частота его колебаний равна

$$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{J}} = \sqrt{\frac{g}{L}} \quad \text{или} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}, \quad (8)$$

где  $L = J/ml$  - приведенная длина физического маятника.

Из (7) и (8) видно, что, если приведенная длина физического маятника  $L$  равна длине математического маятника  $l$ , то их периоды колебаний одинаковы. Следовательно, приведенная длина физического маятника - это длина такого математического маятника, период колебаний которого совпадает с периодом колебаний данного физического маятника.

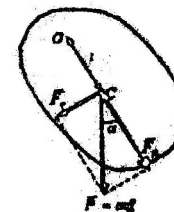


Рис. 2.

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСКОРЕНИЯ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ С ПОМОЩЬЮ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

## Вывод рабочей формулы

Любой реальный маятник, строго говоря, является физическим маятником. Однако, при малых размерах шарика по сравнению с длиной подвеса (нити), можно описывать движение маятника как математического. При этом под длиной нити  $l$  математического маятника следует понимать расстояние от точки подвеса до центра тяжести шарика (геометрического центра).

Поскольку непосредственно измерить длину маятника достаточно сложно, при измерении ускорения силы тяжести поступают следующим образом. Измеряют с помощью линейки расстояния:  $H$  – от точки подвеса маятника до его основания,  $h$  – от основания подставки до шарика и диаметр шарика  $2r$ , где  $r$  – радиус шарика (см. Рис.1). Длина маятника, как видно из рисунка,  $l = H - h - r$ . Затем определяют периоды свободных колебаний  $T_1$  и  $T_2$  маятников двух различных длин  $l$  и  $l'$ . Из формулы (7) имеем

$$T_1^2 = 4\pi^2 \frac{l}{g} = 4\pi^2 \frac{H - h - r}{g} \quad \text{и} \quad T_2^2 = 4\pi^2 \frac{l'}{g} = 4\pi^2 \frac{H - h' - r}{g}$$

Вычитая из второго выражения первое, получим

$$T_2^2 - T_1^2 = 4\pi^2 \frac{l' - l}{g} = 4\pi^2 \frac{h' - h}{g}$$

откуда

$$g = 4\pi^2 \frac{h' - h}{T_2^2 - T_1^2} \quad (9)$$

Таким образом, для определения  $g$  необходимо измерить лишь разности длин маятников:  $l' - l = h' - h$ .

## Порядок выполнения измерений

1. Установить длину маятника  $l'$
2. Измерить с помощью линейки расстояние  $h'$  от нижнего края шарика до горизонтальной подставки.
3. Отвести шарик от положения равновесия на небольшой угол (около  $4-5^\circ$ ) отпустить шарик, предоставив ему возможность свободно колебаться. В момент наибольшего отклонения маятника включить секундомер и отсчитать время  $t_1$ , в течение которого маятник совершит  $n = 20$  полных колебаний. Измерение времени  $t_1$  выполнить три раза. Результаты измерений записать в таблицу 1
4. Установить новую длину маятника  $l$ . Измерить расстояния  $h$  от нижней кромки шарика до горизонтальной подставки. Отсчитать время  $t_2$ , в течение которого маятник совершит  $n = 20$  полных колебаний. Измерение времени  $t_2$  выполнить три раза. Результаты измерений записать в таблицу 1
5. По результатам измерений времени полных колебаний  $t$  рассчитать периоды колебаний  $T_1$  и  $T_2$  по формуле  $T = t/n$ . Рассчитать средние значения  $T_1$  и  $T_2$ .
6. Вычислить ускорение силы тяжести и оценить погрешность измерений.

Таблица 1

№ п/п	$h', \text{мм}$	$h'', \text{мм}$	$t_1, \text{с}$	$t_2, \text{с}$	$T_1, \text{с}$	$T_2, \text{с}$

## КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какие физические процессы называют колебаниями?
2. Какие колебания называют свободными?
3. Какие колебания называют гармоническими?
4. Напишите уравнение гармонических колебаний и дайте определение величин, входящих в уравнение
5. Получите выражения для скорости и ускорения точки, совершающей гармонические колебания.
6. Что называют математическим маятником?
7. Что называют физическим маятником?
8. Напишите формулы для периодов колебаний математического и физического маятников.
9. Дайте понятие приведенной длины физического маятника.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Трофимова Т. В. Курс физики – М.: Высшая школа, 1994 – 541с
2. Сивухин Я. В. Общий курс физики – Т. 2. – М.: Наука, ГИФМЛ, 1979 – 520с
3. Детлаф А. А., Яворский Б. М., Милковская Л. Б. Курс физики Т. 2. – М.: Высшая школа – 384с.
4. Савельев И. В. Курс общей физики. Т. 2. М.: Наука, ГИФМЛ, 1982 – 432